曲線と曲面

―微分幾何的アプローチ―

梅原雅顕
山田光太郎　共著

裳華房

曲線と曲面

— 微分幾何的アプローチ —

梅 原 雅 顕
山田光太郎 共著

裳 華 房

Curves and Surfaces

by

Masaaki Umehara
Kotaro Yamada

SHOKABO

TOKYO

はじめに

曲線・曲面は17世紀に微積分が発見されて以来研究されてきた伝統ある学問である．また，最近ではコンピュータ・グラフィクスなど，応用の面からも曲線・曲面への関心が広がっている．一方，数学の高度化に伴って，最近の大学の数理系学科のカリキュラムにおいては多様体論への入門として，ごく小さな取り扱いしかなされていないことが多いようであるが，教育的立場でいえば，曲線の曲率から曲面のガウス・ボンネの定理の紹介をする半年の講義が望まれる．この方面については，多くの良書がすでに刊行されている．中でも筆者が深く尊敬している小林昭七先生の「曲線と曲面の微分幾何」(裳華房)は筆者が学生時代から親しんできた良書である．すでにこれだけの書物が出ているなかで私たちが敢えて筆をとることにした理由の一つは，半年の講義を意図した教科書が今までなかったこと，もう一つは，私たちが研究者としてこの分野にたずさわり，あらためてその伝統と，奥の深さを知るようになって，この気持をぜひ読者に伝えたいと考えるようになったからである．

本書は，この分野の大学の半年分の講義テキスト，あるいはセミナーの教材を意図している．本書を執筆するにあたって，登山路にたとえるなら，この分野の概説として読者に山並みを案内する単なるガイドの立場にとどまらず，実際に読者が自ら歩み，足場をたしかめながら学べるような本を目指した．

本書の第I章と第II章で，半年分の講義の内容として，平面曲線の曲率とその性質，空間曲線の局所的理論，空間の曲面の局所的な理論を経て，ガウス・ボンネの定理の意味を無理なく理解できるような道筋を設定している．

それに加えて，平面曲線の大域的な性質，および曲面論に関するいくつかの話題が含まれている．各節の末尾には本文の理解を深めるために必要な事項を演習問題としておさめた．

講義で使われる場合には，＊印を付した節をとばして使用するとちょうど半年分の内容になるようにした．節だけでなく，歯ごたえのある問題や発展事項にも＊印がついている．セミナーのテキストや自習書として使用する場合にも，＊印の部分は興味に応じて取捨選択して読んでいただきたい．これらを省いても，それ以外の部分を理解するのには支障がないように配慮している．半年間の講義のテキストとして使う場合の参考として，学習順序の一例を目次の最後に図として示しておいた．

本書を読むための予備知識は，大学初年級の微積分および線形代数で学ぶ内容までであり，それを越える部分については適宜解説を加えてある．願わくば数理系の学生に限らず多くの方々に読んでいただきたい．

本書は第II章までで完結している．しかし，曲面論はとくに奥が深く，多様体論を学んだあとで勉強できる事柄も少なくないので，第III章ではすでに多様体を学んだ，あるいは勉強中の読者を対象として進んだ話題を紹介した．この部分はいわば，本書の番外篇といったものであるから，第II章のあと一息いれて，縁あって読者が多様体論を学ぶことになった折りに，取り組んでみるとよいだろう．また，本文とは別に2つの付録を用意している．付録Aでは，本書を読むのに必要な微積分と線形代数の知識をまとめてある．付録Bでは，本文より少し進んだ話題をまとめておいた．興味に応じて参照して欲しい．

本書によって，曲線・曲面に関する読者の関心と造詣が深まれば，筆者にとって望外の幸せである．

先にも述べた小林昭七先生の「曲線と曲面の微分幾何」は，ぜひ本書とともに読まれることをお勧めしたい．また，長野 正先生の「曲面の数学」(培

風館）は，本書や上記の書物とは違った立場で書かれているが，曲面の幾何学を知るために良い書物である．さらに，もう少し古典的な内容については，ぜひ安達忠次先生の「微分幾何学概説」（培風館）を参照されたい．最近，剱持勝衛先生による「曲面論講義 — 平均曲率一定曲面入門」（培風館），および西川青季先生による「幾何学」（朝倉書店）が出版された．本書で曲線論・曲面論に興味をもたれた読者は，本書と併せてぜひ読んでいただきたい．

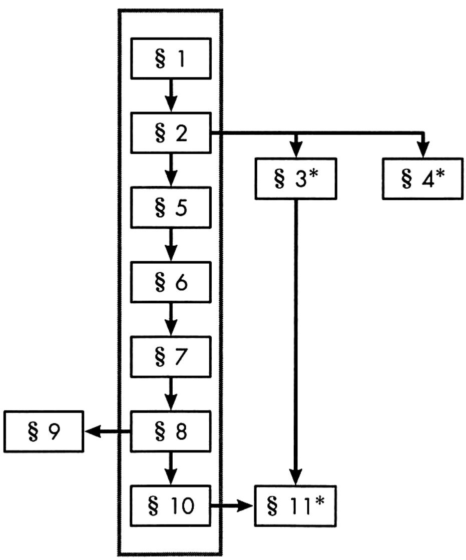
本書の執筆にあたって，東北大学の浦川 肇 先生には原稿を読んでいただき有益な助言をいただだいた．また，神戸大学のウェイン・ラスマン(Wayne Rossman)氏には原稿の誤りを指摘していただだいた．

広島大学卒業生の佐藤貴司君には，原稿に対して貴重な意見をいただだいた．また，学生諸君には授業やセミナーなどでさまざまな意見をいただだいた．最後になるが，裳華房編集部の細木周治氏にはたいへんにお世話になった．この場を借りて厚く御礼申し上げたい．

2002年 4月

著　　者

目　　次


§ 1
§ 2
§ 3*
§ 4*
§ 5
§ 6
§ 7
§ 8
§ 9
§ 10
§ 11*

第I章
曲　　線

関数のグラフや助変数表示された曲線は，高等学校以来おなじみであろう．この章では，助変数表示を用いて，平面曲線や空間曲線の曲がり具合を表す曲率を定義し，その幾何学的な意味を説明する．応用として閉曲線の回転数や，うずまき線のもつ不思議な性質などを紹介する．空間曲線は第II章で述べる曲面の話と密接に関係するが，平面曲線の回転数も，第III章で紹介する2次元多様体のガウス・ボンネの定理の証明に応用される．

§ 1. 曲線とは何か

紙と鉛筆があれば，さまざまな曲線を描くことができる．

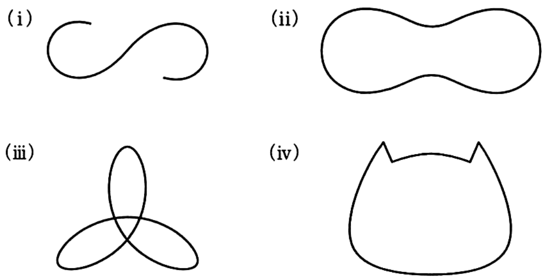


図 1.1　いろいろな曲線

図1.1の（ i ）は**なめらかな曲線**の例である．（ii）の図もなめらか[1]な曲線だが，端がなく，ひと回りして元に戻ってくる．このような曲線を**閉曲線**という．（iii）の図のように交点のある曲線も**自己交叉**[2]のある，なめらかな閉曲線と思うことにする．（iv）の図は閉曲線であるが，ところどころに角（かど）があり，その点でなめらかではない．このような曲線を**区分的になめらかな曲線**とよぶ．この章では，主になめらかな曲線を扱うことにする．平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の曲線を数式で表す方法を紹介しよう．

関数のグラフ　微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフは座標平面上のなめらかな曲線を表す．一般の曲線は，必ずしも関数のグラフとして表すことができるとは限らない．たとえば，$y = \sqrt{1-x^2}$ のグラフは原点を中心とする半径1の円の上半分を表すが，円全体を1つの関数のグラフで表すことはできない．（$y = \pm\sqrt{1-x^2}$ は1つの関数とはいわない．）

1）本書では「なめらか」という言葉を「何回でも微分可能」という意味で用いる．

2）「交叉」は「こうさ」と読み，十字路のように交わっていることを表す．「交差」とも書かれる．

曲線の陰関数表示　方程式 $x^2+y^2=1$ は平面上の原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の円を表す．このように 2 変数関数 $F(x,y)$ を用いて方程式 $F(x,y)=0$ をみたす平面上の点の集まりとして曲線を表す方法を，曲線の**陰関数表示**という．関数 $f(x)$ に対して $F(x,y)=y-f(x)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフを $y-f(x)=0$ として陰関数で表示することができる．

例 1.1　以下は陰関数で表示される曲線の例（a, b は正数）である（図 1.2）：

楕円：　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,$

双曲線：　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,$

レムニスケート[3)]：　$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,$

シソイド[4)]：　$x^3+xy^2-2ay^2=0.$　◇

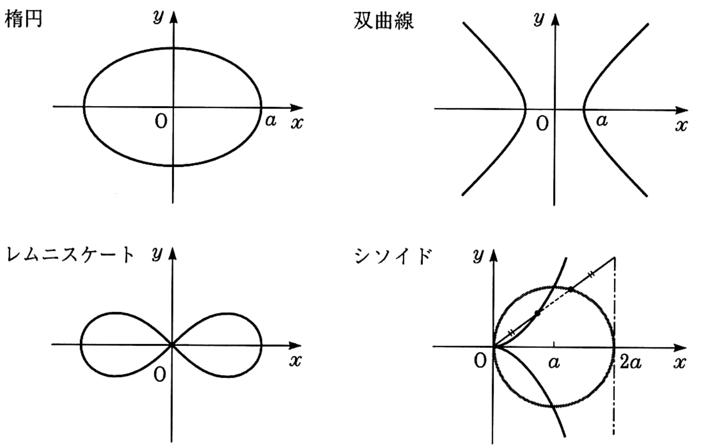


図 1.2

3）2 点 $(\pm a/\sqrt{2}, 0)$ からの距離の積が $a^2/2$ で一定になるような点の軌跡として，ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli, 1654 - 1705）によって研究された．

4）点 $(a,0)$ を中心とする半径 a の円 C の点 $\mathrm{A}(2a,0)$ における接線を m とする．m 上の点 P に対して，線分 OP と円 C の交点を Q とするとき，OX $=$ PQ となるような線分 OP 上の点 X の軌跡がシソイドになる．

なめらかな2変数関数 $F(x, y)$ を用いて $F(x, y) = 0$ と陰関数で表示されている図形を考える．この図形上の点 (x_0, y_0) （$F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点）において

$$F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

が成り立っているならば，この図形は (x_0, y_0) の近くで自己交叉をもたず，$y = f(x)$ のグラフで表すことができる（付録Aの定理1.6（陰関数定理）参照）．また，$F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ならば，x と y の役割を入れ替えることにより，この図形は $x = g(y)$ のグラフで表されることがわかる．

これに対して

$$F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$$

となる点 (x_0, y_0) は**特異点**とよばれる特別な性質をもつ点である．たとえば，例1.1のシソイドは原点 $(0, 0)$ を特異点にもつが，この点で曲線はとがっている．一方，レムニスケートも特異点が原点にあり，そこで自己交叉をもつ．このように特異点での曲線の形にはさまざまな場合がある．

曲線の助変数表示　平面上を動く点を考え，その時刻 t における点の位置（座標）を $(x(t), y(t))$ とすればこの動点の軌跡は曲線を表していると考えられる．このような表示を曲線の**助変数表示**という[5]．本書では2つの関数 $x(t), y(t)$ の組

(1.1) $$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

で曲線を表すことにする．

曲線が関数 $y = f(x)$ とグラフ表示されているとき，

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

と表すことにより，これも助変数表示の特別な場合と考えることができる．曲線の像を道に，動点 $\gamma(t)$ を車にたとえると，助変数の選び方は走行法に対応し，さまざまな可能性がある．

5） 助変数は，パラメータ，媒介変数，径数（けいすう）などともいう．

例 1.2　助変数 t を用いた表示

$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y(t)=\frac{2t}{1+t^2}\qquad (t\in\boldsymbol{R}) \tag{1.2}$$

は原点を中心とする半径 1 の円から点 $(-1,0)$ を除いた曲線を表す[6]．

また，s を助変数とした表示

$$x(s)=\cos s,\qquad y(s)=\sin s\qquad (-\pi<s\leqq\pi) \tag{1.3}$$

において，助変数 s の変域を開区間 $(-\pi,\pi)$ に制限すれば，これは (1.2) と同じ曲線を表すことがわかる．点 $(x(t),y(t))$ と点 $(x(s),y(s))$ が一致するのは，助変数 s と t の間に $t=\tan(s/2)$ という関係が成り立つときである．　◇

一般に，曲線が

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))\qquad (a\leqq t\leqq b)$$

と助変数を用いて表示されているとする．区間 $[c,d]$ から $[a,b]$ の上への単調増加関数 $t=t(u)$ $(t(c)=a,\ t(d)=b)$ に対して，

$$\tilde{\gamma}(u)=\gamma(t(u))\qquad (c\leqq u\leqq d)$$

は，図形としては $\gamma(t)$ が表すものと同じ曲線を与える．このとき $\tilde{\gamma}$ は「γ から**パラメータ変換**によって得られる」という．とくに誤解の恐れがないときは $\tilde{\gamma}(u)$ のことを $\gamma(u)$ と書く．

例 1.3　例 1.1 の曲線は，次のように助変数を用いて表示することができる．

楕円：　$x(t)=a\cos t,\quad y(t)=b\sin t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$,

双曲線[7]：　$x(t)=a\cosh t,\quad y(t)=b\sinh t\quad (t\in\boldsymbol{R})$,

レムニスケート：

$$x(t)=\frac{a\cos t}{1+\sin^2 t},\qquad y(t)=\frac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\quad (0\leqq t\leqq 2\pi),$$

シソイド：　$x(t)=\dfrac{2at^2}{1+t^2},\quad y(t)=\dfrac{2at^3}{1+t^2}\quad (t\in\boldsymbol{R})$．　◇

6）　座標がともに有理数であるような平面上の点を有理点という．原点を中心とする半径 1 の円から点 $(-1,0)$ を除いた曲線上の有理点は式 (1.2) において t が有理数であるような点と一致している．

7）　双曲線関数 $\cosh t$，$\sinh t$ の定義は，付録 A-1 (163 ページ) を参照されたい．

助変数で表示された曲線 $\gamma(t)=(x(t), y(t))$ に対して,

$$\dot{\gamma}(t):=(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \qquad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt}\right)$$

は[8], 曲線を運動する点の軌跡と思ったとき, 時刻 t における動点の**速度ベクトル**を表している. (本書では, 助変数 t についての微分を "˙" (ドット)で表す.) 速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ が零ベクトルでなければ, それは点 $(x(t), y(t))$ における曲線の接線方向のベクトルとなっている. とくに, $t=t_0$ において $\dot{x}(t_0)\neq 0$ ならば逆関数定理(付録Aの定理1.5)より $x_0:=x(t_0)$ の近くで $x=x(t)$ の逆関数 $t=g(x)$ が存在することがわかる. このとき $f(x)=y(g(x))$ とおけば, 曲線 $\gamma(t)$ は点 $(x(t_0), y(t_0))$ の近くで $y=f(x)$ のなめらかなグラフで表すことができる. また, x 軸と y 軸の役割を入れ替えて考えれば, $\dot{y}(t_0)\neq 0$ のとき, ある y の関数 $h(y)$ が存在し, 曲線は $x=h(y)$ のグラフで表されることがわかる.

一方, 曲線 $\gamma(t)=(x(t), y(t))$ の速度ベクトルが0, すなわち $\dot{x}(t)=\dot{y}(t)=0$ となる点の近くでは曲線がなめらかにならない可能性がある. たとえば, 例1.3のシソイドの助変数表示は t のなめらかな関数で与えられるが, $t=0$ で $\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0$ となっており, 対応する点 $(0,0)$ はとがった点になっている.

曲線の長さ 助変数 t で表示された曲線 $\gamma(t)=(x(t), y(t))$ $(a\leqq t\leqq b)$ について, 助変数が t から微小な量 Δt だけ変化したとき, 対応する曲線の微小部分の長さは $\gamma(t)$ と $\gamma(t+\Delta t)$ の距離

$$|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)|$$

におよそ等しい. ここで $x(t), y(t)$ の変化量を

$$\Delta x:=x(t+\Delta t)-x(t), \qquad \Delta y:=y(t+\Delta t)-y(t)$$

とおくと

8) 記号 "$:=$" は「左辺を右辺のように定義する」という意味である. また, 本書ではベクトルでも太字を用いないことが多いので, 文脈で判断してほしい.

$$|\gamma(t+\varDelta t)-\gamma(t)|=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}\,\varDelta t$$

となる．この区間全体での総和をとると，曲線の**長さ**（**弧長**）$\mathcal{L}(\gamma)$ は

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \tag{1.4}$$

となることがわかる[9)]．曲線の長さは曲線の助変数表示の取り方によらない（節末問題の **2** 参照）．

式 (1.4) の被積分関数は速度ベクトル $\dot{\gamma}$ の大きさ $|\dot{\gamma}|$ に等しいから，

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b|\dot{\gamma}(t)|\,dt \tag{1.5}$$

と書き直すことができる．とくに $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ のグラフは $\gamma(t)=(t,f(t))$ と助変数で表示されるので，(1.5) は次のようになる：

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

一方，平面の極座標 (r,θ) において r が θ の関数として $r=r(\theta)$ と表されているとき，対応する点の軌跡は曲線を表す．これを曲線の**極座標表示**という．$r=r(\theta)$ $(a\leqq\theta\leqq b)$ で与えられる曲線は

$$\gamma(\theta)=(\,r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta\,)$$

と助変数で表示されるから，その曲線の長さは

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \tag{1.6}$$

と表すことができる．

このように曲線の長さを積分で表すことができるが，その積分を簡単な関数で表せるとは限らない．たとえば $y=1/x$ のグラフですら，指定された x の範囲での弧長を初等関数[10)]で表現できないことが知られている．しかし

9）この公式の厳密な証明はここではしない．たとえば [23]（巻末の参考文献リスト参照）を見よ．

10）整式，有理式，べき乗根，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数 に加減乗除と合成を有限回ほどこして得られる関数を初等関数という．

この公式を知っていれば，積分の近似公式によって(計算機などで)曲線の長さの近似値を計算できる．次は弧長が具体的に計算できる例である．

例 1.4 鎖の両端を天井にかけて吊り下げると関数

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax \qquad (-c \leqq x \leqq c) \tag{1.7}$$

のグラフで表される曲線(**懸垂線**とよばれる)になる[11](図1.3)．ただし a は正の定数で，鎖の両端は $x = \pm c$ に対応する点に固定されているとする．(1.7) より $dy/dx = \sinh ax$ であるから，この曲線の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_{-c}^{c} \sqrt{1 + \sinh^2 ax}\, dx \\ &= 2\int_0^c \cosh ax\, dx \\ &= \frac{2}{a}\sinh ac \end{aligned} \tag{1.8}$$

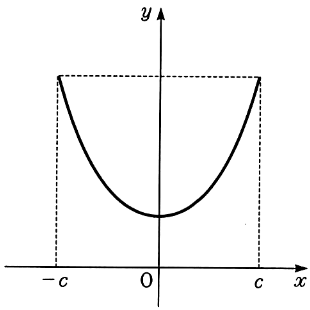


図 1.3 懸垂線

となる．とくに鎖の長さ l ($l > 0$)と鎖の両端の距離 $2c$ ($2c < l$)を与えると，(1.8) をみたす正の定数 a はただ一つに定まる． ◇

練習問題 1

1. 放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ ($-1 \leqq x \leqq 1$) の長さを求めよ．

2. 曲線の長さを与える式 (1.4) は助変数の取り方によらないことを示せ．

3. (1) $0 < b < a$ のとき，楕円 $(a\cos t,\ b\sin t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ の長さは

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, dt \qquad \left(\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)$$

と表されることを示せ．ここで ε ($0 \leqq \varepsilon < 1$)は楕円の**離心率**とよばれる[12]．

---

11) この事実の簡単な証明は [25] (巻末の参考文献リスト参照)にある．

12) 離心率(eccentricity)は通常 “e” で表すが，ここでは自然対数の底 e と区別するために “ε” を用いることにする．

$\varepsilon \neq 0$ のときはこの積分を初等関数で表すことはできない．（$\varepsilon = 0$ のときは円となり，$\varepsilon = 1$ のときは直線になる．）

（2） 地球の北極と南極を結ぶ直線（地軸）を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，極方向に短軸をもつ楕円になる．テイラーの定理（付録Aの式(1.1)）より x が十分小さいときに近似式

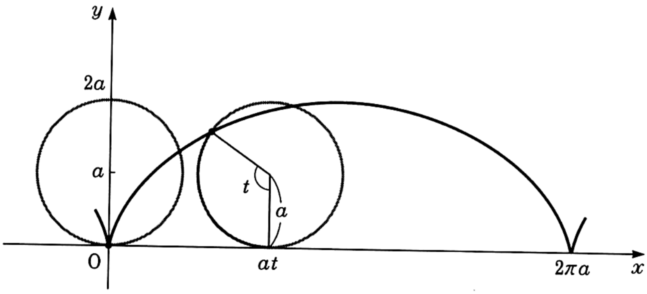
$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

が成り立つ[13]ことを用いて，この楕円の周の長さの近似値を求めよ．さらに，テイラーの定理の剰余項の形を用いて誤差の見積りをせよ．ただし赤道方向の半径 a は 6377.397 km，極方向の半径 b は 6356.079 km とする．

4. 半径 a（$a>0$）の円が，与えられた直線上を滑ることなく転がるとき，この円上の定点が描く軌跡をサイクロイドという（下図）．定点が原点 $(0,0)$ を出発して x 軸上を転がったときの円の回転角を t とすると，曲線は

$$\gamma(t) = (\,a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\,)$$

と表示される．円が1回転すると t は0から 2π まで動くが，これをサイクロイドの1周期とよぶ．サイクロイドの1周期の長さは，円の半径の8倍になることを示せ．



13） 記号 "≈" は「およそ等しい」という意味である．もちろん厳密な意味ではない．

§ 2. 曲率とフルネの公式

ここでは曲線の「曲がり具合」を表す曲率とよばれる量を紹介する．まず，曲線のもっとも標準的な助変数表示である弧長パラメータを定義する．

弧長パラメータ　例1.2で見たように，与えられた曲線を助変数で表示する方法は一通りではない．そのうちで，もっとも自然な助変数は何だろうか．前節で定義した弧長を用いて，出発点からの曲線の長さを助変数とすれば曲線の自然な助変数表示が得られるだろう．以後，曲線の助変数表示は，速度ベクトルが零ベクトルにはならない場合のみを考えることにする．

助変数で表示された曲線 $\gamma(t)$ （$a \leqq t \leqq b$）に対して，

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\, du \tag{2.1}$$

によって曲線 $\gamma(t)$ の区間 $[a, t]$ に対応する部分の長さが与えられる．この式を微分して $\dot{\gamma} \neq 0$ に注意すれば，

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

となる．よって，区間 $[a, b]$ 間の曲線 $\gamma(t)$ の長さを l とすると，$s(t)$ は閉区間 $[a, b]$ から $[0, l]$ への単調増加関数なので，逆関数 $t = t(s) : [0, l] \to [a, b]$ が存在する．逆関数定理（付録Aの定理1.5）よりこの逆関数 $t(s)$ も s で微分可能である[1]から，これを用いて

$$\gamma(s) := \gamma(t(s)) \qquad (0 \leqq s \leqq l)$$

のように曲線を新しい助変数 s で表示することができる．この s を曲線の**弧長パラメータ**という．

1）本書では C^∞ 級のことを微分可能とよぶことにする．閉区間 I で定義された関数 $f(x)$ が微分可能であるとは，$f(x)$ が I を含む開区間上で定義された微分可能な関数に拡張されることである．

いままで“˙”(ドット)で助変数 t に関する微分を表したが，弧長パラメータ s に関する微分はこれと区別して“′”(プライム または ダッシュ)で表すことにする．合成関数の微分公式より

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \tag{2.2}$$

だから，とくに $|\gamma'(s)| = 1$ であること，すなわち弧長パラメータによる曲線の速さ(曲線の速度ベクトルの大きさ)は常に1であることがわかる．

逆に $\gamma(t)$ を曲線の速さ1の助変数表示，すなわち $|\dot{\gamma}| = 1$ をみたすものとする．このとき (2.1) より，出発点からの弧長は t と定数だけの差しかない．したがって，弧長を助変数に選ぶことと，速さ1の助変数をとることは本質的に同じである．

曲線を道路にたとえて，道路を走る車の時刻 t における位置が曲線の助変数表示を与える，と考えれば，一般の助変数による表示は速さを変更して走る車を表し，弧長パラメータによる表示は常に速さ1で前進する車を表す．

弧長をパラメータとして曲線を $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ と表示すると，

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \tag{2.3}$$

は曲線の $\gamma(s)$ における進行方向の**単位接ベクトル**となる．さらに

$$\boldsymbol{n}(s) := (-y'(s), x'(s)) \tag{2.4}$$

は $\boldsymbol{e}(s)$ に直交し，$\boldsymbol{e}(s)$ 方向に対して左向きの単位ベクトルを与える(図2.1)．これを，曲線上の点 $\gamma(s)$ における，進行方向に対して左向きの**単位法線ベクトル**とよぶ．

曲率の定義　いま $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ を弧長パラメータによる曲線の助変数表示とすると，速度ベクトルの大きさは1になる．すなわち，

$$\gamma'(s)\cdot\gamma'(s) = |\gamma'(s)|^2 = 1$$

である．“・”は平面ベクトルの内積を表す．この両辺を s で微分すると

$$2\gamma''(s)\cdot\gamma'(s) = 0$$

となるから，加速度ベクトル $\gamma''(s)$ は $\gamma'(s)$ に直交する．このことは

$\gamma''(s)$ が単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ に比例していることを意味する．この比例定数を $\kappa(s)$ と書き[2]，曲線 $\gamma(s)$ の**曲率**という．すなわち

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s) \tag{2.5}$$

である．曲率は助変数 s の値ごとに決まる値であるから s の関数である．この意味で $\kappa(s)$ を**曲率関数**ということもある．曲率 $\kappa(s)$ が正であれば曲線は $\gamma(s)$ の近くで左曲がりであり，負であれば右曲がりである．車の運転にたとえるならハンドルがまっすぐ向いた状態が曲率 0，左に向いた状態が正，右に向いた状態が負となる(図 2.1)．

$\gamma', \boldsymbol{n}$ を列ベクトルとみなして，それを並べてできる 2 次正方行列 $(\gamma', \boldsymbol{n})$ を考えると $\det(\gamma', \boldsymbol{n}) = 1$ (節末問題の **1** 参照)であるから

$$\kappa(s) = \det(\gamma', \gamma'') \tag{2.6}$$

と表すことができる．

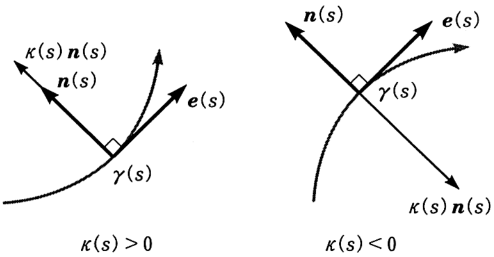


図 2.1 曲率の符号と曲線の曲がり具合い

例 2.1 (1) 直線は，その方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$，直線上の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ としたとき，$\gamma(s) = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{v}$ と弧長パラメータ s で表示できる．とくに $\gamma''(s) = 0$ となるので，その曲率は恒等的に 0 である．

(2) 円の曲率を計算してみよう．

$$\gamma(s) = \left(a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a}\right) \qquad (a > 0)$$

は半径 a の左回りの円を表す．速度ベクトル

$$\gamma'(s) = \left(-\sin\frac{s}{a},\ \cos\frac{s}{a}\right)$$

2) ギリシア文字 κ は「カッパ」と読む．

の大きさは1なので s は弧長パラメータである．(2.4) から

$$\boldsymbol{n}(s) = \left(-\cos\frac{s}{a},\ -\sin\frac{s}{a}\right)$$

となるが，

$$\gamma''(s) = \frac{1}{a}\left(-\cos\frac{s}{a},\ -\sin\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}\,\boldsymbol{n}(s)$$

だから，半径 a の左回りの円の曲率は $\kappa(s) = 1/a$ で一定になることがわかる．一方，半径 a（$a > 0$）の右回りの円の曲率は $-1/a$ であることがわかる．◇

弧長とは限らない助変数で表された曲線の曲率は，弧長パラメータで曲線を表示し直してから求めた曲率のこととする．しかし，弧長パラメータは簡単に求められない場合が多いので，一般の助変数表示で曲率を求める公式が必要となる．弧長とは限らない助変数 t で表示された曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ の曲率 $\kappa(t)$ は次で与えられる：

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\det(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}. \tag{2.7}$$

［式 (2.7) の証明］　(2.2) と合成関数の微分公式を用いれば

$$\gamma' = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}, \qquad \gamma'' = \frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} + \left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)^{\prime}\dot{\gamma}$$

である．これを式 (2.6) に代入して，行列式の性質に注意して整理すればよい．□

とくに $y = f(x)$ のグラフとして表される曲線の曲率は

$$\kappa(x) = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \qquad \left(\dot{y} = \frac{dy}{dx},\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{2.8}$$

となる．

例 2.2　公式 (2.7) により楕円 $\gamma(t) = (a\cos t,\ b\sin t)$（$a, b > 0$）の曲率は

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \tag{2.9}$$

となる．もし $a > b$ なら，楕円の曲率は x 軸との交点 $(\pm a, 0)$ において最大値 a/b^2，y 軸との交点 $(0, \pm b)$ において最小値 b/a^2 をとる．◇

曲率円　曲線上のある点の近くで曲線を最もよく近似する直線は，その点における接線である．直線の代りに円で近似することを考えよう．曲線上の点 $\gamma(s)$ における曲線の曲率 $\kappa(s)$ が0でないとする．このとき $\gamma(s)$ で曲線に接する半径 $1/|\kappa(s)|$ の円を曲線の進行方向に向かって左側，右側に1つずつおくことができる．$\kappa(s)>0$ のときは曲線の進行方行に向かって左側の円を，$\kappa(s)<0$ のときは右側の円を曲線の $\gamma(s)$ における**曲率円**という(図2.2)．また，曲率円の半径 $1/|\kappa(s)|$ を**曲率半径**とよぶ．このとき，曲率円の中心を**曲率中心**とよび，その位置ベクトルは

$$\gamma(s)+\frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s)$$

で与えられる．

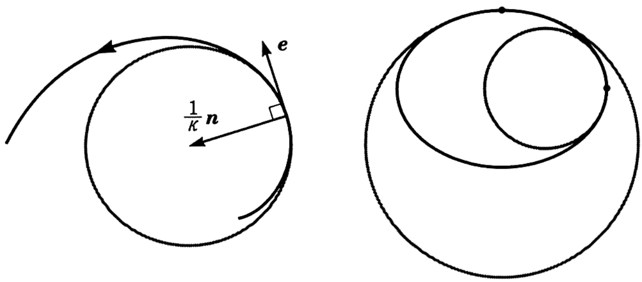


図2.2　曲率円

点 $\gamma(s)$ における曲率が0のときは，その点における曲線の接線を(半径が無限大の円とみなして)曲率円とよぶ．

曲率円には曲線の向きと同調するような向きをつける．すると例2.1より，曲率円と元の曲線はその接点で同じ曲率をもつことがわかる[3]．

曲率円は各点において曲線を最もよく近似する円である(16ページの定理2.4)．このことを示すために，まず「最もよく近似する」という言葉の意味をはっきりさせよう．

3) 走っている車が ある瞬間に切っていたハンドルを止めると，車は円運動をはじめる．この円が曲率円である．

曲線 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ の $t=t_0$ における接ベクトル $\dot{\gamma}(t_0)$ は零ベクトルではないと約束している．そこで $\gamma(t_0)$ を原点として $\dot{\gamma}(t_0)$ の向きに x 軸をとり，$t=t_0$ における左向き法線ベクトルの方向に y 軸がくるように平面の座標軸を設定すると，接ベクトルは $\dot{\gamma}(t_0)=(a,0)$ ($a=\dot{x}(t_0)\neq 0$) の形になる(図2.3)．したがって，§1 (6ページ)で述べたことにより，原点すなわち $t=t_0$ の近くで曲線は $y=f(x)$ のグラフの形で表すことができる．

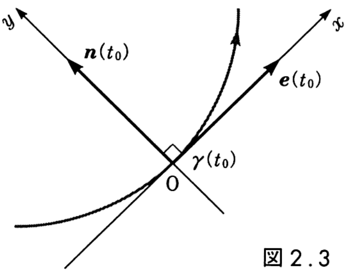


図2.3

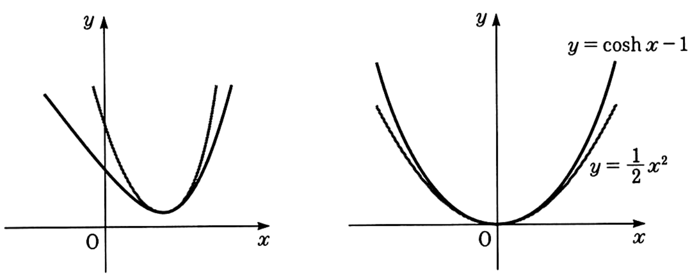
定義2.3　2つの曲線 $\gamma_1(t)$ と $\gamma_2(u)$ が点Pで**1次の接触**をするとは，2曲線がともに点Pを通り，その点における接線と進行方向を共有することである．このとき，Pを原点とし，進行方向に x 軸，左向き法線方向に y 軸をとれば，上に述べたように $\gamma_1(t)$ および $\gamma_2(u)$ はそれぞれ関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフとして表すことができ，

$$f(0)=g(0)=0\,,\qquad \frac{df}{dx}(0)=\frac{dg}{dx}(0)=0$$

が成り立つ．このとき，さらに，

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0)=\frac{d^2g}{dx^2}(0)$$

が成り立つならば，2つの曲線はPで**2次の接触**をするという(図2.4左)．



2次の接触をする曲線　　3次の接触をする放物線と懸垂線　　図2.4

同様にして高次の接触の概念を定義することができる．たとえば定義2.3で $f(x)$ と $g(x)$ の $x=0$ における3階までの微分係数がすべて一致するとき，2つの曲線は3次の接触をするという．放物線 $y=x^2/2$ と懸垂線 $y=\cosh x-1$ は原点で3次の接触をしている(図2.4右)．

曲線の接線は曲線と1次の接触をするので，曲線の**1次近似**であるという．同じ言葉づかいをするなら，以下の定理から曲率円は曲線の**2次近似**であるということができる．

定理2.4 曲線 $\gamma(t)$ 上の1点 $\gamma(t_0)$ における曲率円は，その曲線に点 $\gamma(t_0)$ において2次の接触をする．逆に点 $\gamma(t_0)$ で曲線に2次の接触をする円は曲率円に限る．

[**証明**] $\gamma(t_0)$ において，接触の定義に用いた座標系 (x,y) により，曲線を関数のグラフ $y=f(x)$ で表すと，(2.8) より $x=0$ でのテイラー展開は $f(x)=\dfrac{\kappa(t_0)}{2}x^2+o(x^2)$ となる．$\kappa(t_0)=0$ と，$f(x)$ のグラフが x 軸と2次の接触をすることは同値なので $\kappa(t_0)>0$ としてよい．曲線に接する半径 a の円は $y=a-\sqrt{a^2-x^2}$ と書けるので，直接計算で，円が曲線と2次の接触をするための必要十分条件が $a=1/\kappa(t_0)$ であることがわかる． □

以下に述べる命題2.5, 2.6は§4でのみ用いられるが，重要な性質なのでここで紹介しておく．

定義にしたがって2つの曲線が接触することを確かめるためには，曲線をグラフで書き表さなければならない．しかし次のような判定法がある．

命題2.5 2つの曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(u)$ が点Pにおいて1次(2次)の接触をするための必要十分条件は，γ_2 の助変数をうまく選べば $t=t_0$，$u=u_0$ において

$$\gamma_1(t_0)=\gamma_2(u_0)=\mathrm{P}, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt}(t_0)=\frac{d\gamma_2}{du}(u_0), \tag{2.10}$$

$$\left(2\text{ 次の接触の場合はさらに } \frac{d^2\gamma_1}{dt^2}(t_0) = \frac{d^2\gamma_2}{du^2}(u_0) \right)$$

が成り立つようにできることである[4]．

［**証明**］　グラフ表示も助変数表示の特別な場合であるから，必要性は明らか．

以下，十分性を示す．ここでは，助変数 t に関する微分を“ $\dot{}$ ”，u は弧長と限らないが記号の区別のために u に関する微分を“ $'$ ”で表すことにする．1 次の接触については定義から明らか．以下，2 次の接触をしていることを示そう．

曲線を $\gamma_1(t) = (x(t), y(t))$，$\gamma_2(u) = (\tilde{x}(u), \tilde{y}(u))$ とおき，さらに，定義 2.3 のように 2 つの曲線をそれぞれ $y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフで表しておく．すると $y(t) = f(x(t))$，$\tilde{y}(u) = g(\tilde{x}(u))$ が成り立つから，合成関数の微分公式より，

$$\frac{df}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \frac{dg}{dx} = \frac{\tilde{y}'}{\tilde{x}'}, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}, \quad \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{\tilde{y}''\tilde{x}' - \tilde{y}'\tilde{x}''}{\tilde{x}'^3}$$

となる．したがって $\dot{\gamma}_1(t_0) = \gamma_2'(u_0)$ かつ $\ddot{\gamma}_1(t_0) = \gamma_2''(u_0)$ ならば

$$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = \frac{d^2g}{dx^2}(0)$$

となり，2 つの曲線は 2 次の接触をすることがわかる．　□

さらに高次の接触を調べるためには，適当な助変数表示を見つけて高階の微分係数を比較すればよい（節末問題の **8** 参照）．

次に，接触の概念が（一般の）座標変換で不変であることを示す．

平面の領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への微分可能写像 $\varphi : D \to \boldsymbol{R}^2$ が $\varphi(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ で与えられているとする[5,6]．この写像が**微分同相写像**である，あるいは**座標変換**であるとは，φ が 1 対 1 写像であって逆写像 $\varphi^{-1} : \varphi(D) \to D$ もまた微分可能写像となることである．

4）　曲線 $\gamma_2(u)$ の助変数の取り方は無数にある．その中から式 (2.10) を成り立たせるような助変数 u を指定できるということである．

5）　ギリシア文字 φ は「ファイ」あるいは「フィー」と読む．

6）　ギリシア文字 ξ, η はそれぞれ「クサイ，クシー，またはグザイ」，「エータまたはイータ」と読む．これらはローマ文字 x, y の対応物としてしばしば用いられる．

たとえば，$r>0$ と θ に対して

$$x=r\cos\theta\,,\qquad y=r\sin\theta$$

とおけば，(x,y) は**極座標** (r,θ) をもつ平面上の点を与える．これを $r\theta$ 平面から xy 平面への写像

$$\varphi:\ (r,\theta)\longmapsto(x,y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とみなそう．たとえば $D:=\{(r,\theta)\mid r>0,\ -\pi<\theta<\pi\}$ とすれば，$\varphi(D)$ は xy 平面から x 軸の負の部分と原点を除いた領域となり，φ は D から $\varphi(D)$ への全単射を与えるので，逆写像 $\psi:\varphi(D)\to D$ が存在する．さらにヤコビ行列式は

$$\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\neq 0$$

であるから，逆関数定理(付録Aの定理1.5)より ψ は微分可能となる．したがって $\psi=\varphi^{-1}:(x,y)\mapsto(r,\theta)$ は微分同相写像を与えている．

平面の領域 D から別の平面の領域 $\varphi(D)\subset\boldsymbol{R}^2$ への微分同相写像 φ が与えられたとき，領域 D 内の曲線 $\gamma(t)$ に対して $\tilde{\gamma}(t)=\varphi\circ\gamma(t)$ は $\varphi(D)$ 内の曲線となる[7]．この対応で曲線の接触が保たれることを示しているのが次の命題である(図2.5)．

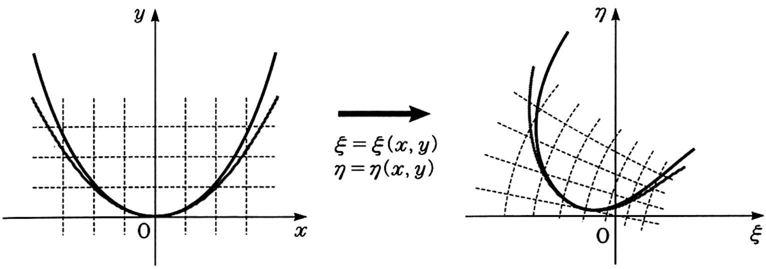


図2.5　微分同相と接触：微分同相 $(x,y)\mapsto\varphi(x,y)=(\xi,\eta)$ によって xy 平面上の2次の接触をする曲線は $\xi\eta$ 平面上の2次の接触をする曲線に写る．ここで，右図の点線は左図の点線で表される座標軸に平行な直線族の φ による像である．

---

7)　$\varphi\circ\gamma$ は写像 φ と γ の合成写像を表す．すなわち $\varphi\circ\gamma(t)=\varphi(\gamma(t))$ である．

命題 2.6　平面の領域 D から $\varphi(D)$ への微分同相写像 φ が与えられているとする．このとき 2 つの D 内の曲線 $\gamma_1(t)$ と $\gamma_2(u)$ が D の点 P で 1 次〔2 次〕の接触をするならば，$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi\circ\gamma_1(t)$ と $\tilde{\gamma}_2(u) = \varphi\circ\gamma_2(u)$ は，点 $\varphi(\mathrm{P})$ で 1 次〔2 次〕の接触をする．

［**証明**］　写像 φ を $\varphi(x,y) = (\xi(x,y), \eta(x,y))$ と書いておく．領域 D 内の曲線 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して

$$\tilde{\gamma}(t) = \varphi\circ\gamma(t) = (\xi(x(t), y(t)),\ \eta(x(t), y(t)))$$

とおくと，合成関数の微分公式より

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi_x\dot{x} + \xi_y\dot{y}\,, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta_x\dot{x} + \eta_y\dot{y}\,,$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi_x\ddot{x} + \xi_y\ddot{y} + \xi_{xx}\dot{x}^2 + 2\xi_{xy}\dot{x}\dot{y} + \xi_{yy}\dot{y}^2,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \eta_x\ddot{x} + \eta_y\ddot{y} + \eta_{xx}\dot{x}^2 + 2\eta_{xy}\dot{x}\dot{y} + \eta_{yy}\dot{y}^2$$

となることを用いると，命題 2.5 より結論が得られる．□

同様のことが 3 次以上の接触についてもいえる（節末問題の **8** 参照）．

フルネの公式　　曲線が $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ と弧長 s によりパラメータ表示されているとき，(2.5) を書き直すと次のようになる：

(2.11)　　$x''(s) = -\kappa(s)\,y'(s)\,, \qquad y''(s) = \kappa(s)\,x'(s)\,.$

これと (2.3), (2.4) より $\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\,\boldsymbol{e}(s)$ を得る．(2.5) と合わせて

(2.12)　　$\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s)\,, \qquad \boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\,\boldsymbol{e}(s)$

が成り立つ．この 2 つの式を合わせて**フルネの公式**[8] という．この公式の応用として，同じ曲率関数をもつ 2 つの平面曲線は合同になることを示そう．

定理 2.7　曲線 $\gamma_1(s)$ と $\gamma_2(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ をともに弧長をパラメータとする長さ l の平面曲線とする．これらが回転と平行移動で重ね合わせることができるための必要十分条件は，両者の曲率が一致することである．

8）　Frenet, Jean Frédéric (1816 - 1900).

［**証明**］ 曲線 γ_1 に回転と平行移動をほどこして γ_2 が得られるとする．ここで，回転と平行移動の合成は曲線の接線を x 軸，法線を y 軸とする座標系に影響を与えないから，定理 2.4 と命題 2.6 より，γ_1 の曲率円にこの回転と平行移動をほどこして得られる円は γ_2 の曲率円となる．一方，平行移動と回転で円の大きさと回転方向は変わらないから γ_2 の曲率は γ_1 の曲率と一致する．（節末問題の **5** で別証明を与える．）

逆に 2 つの曲線が同じ曲率関数 $\kappa(s)$ をもつとする．これらの曲線はあらかじめ平行移動と回転によって出発点（$s=0$）と，出発点での接ベクトルが一致するようにできる．すると

(2.13) $$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)\,,\qquad \gamma_1'(0)=\gamma_2'(0)\,,\qquad \boldsymbol{n}_1(0)=\boldsymbol{n}_2(0)$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{n}_j$（$j=1,2$）は γ_j の左向きの単位法線ベクトルである．この条件のもとで 2 つの曲線が完全に一致してしまうことを示そう．いま平面ベクトルを列ベクトルとみなして，それらを並べて

$$A_1(s)=(\gamma_1'(s),\boldsymbol{n}_1(s))\,,\qquad A_2(s)=(\gamma_2'(s),\boldsymbol{n}_2(s))$$

により 2 次の正方行列を定義する．すると，

(2.14) $${}^tA_1A_1=I\,,\quad {}^tA_2A_2=I\qquad (I \text{ は単位行列})$$

が成り立つ[9]．一方，フルネの公式 (2.12) から

$$A_1'=A_1\begin{pmatrix}0&-\kappa\\ \kappa&0\end{pmatrix},\qquad A_2'=A_2\begin{pmatrix}0&-\kappa\\ \kappa&0\end{pmatrix}$$

となるから

$$(A_1{}^tA_2)'=A_1'{}^tA_2+A_1{}^tA_2'=O\qquad (\text{零行列})$$

となり，$A_1(s)\,{}^tA_2(s)$ が s によらない定数行列であることがわかった．さらに (2.13) により $A_1(0)=A_2(0)$ であり，また (2.14) より ${}^tA_2(s)=A_2^{-1}(s)$ が成り立つので

$$A_1(s)\,A_2^{-1}(s)=A_1(s)\,{}^tA_2(s)=A_1(0)\,{}^tA_2(0)=A_1(0)\,A_2^{-1}(0)=I$$

がすべての s について成り立つから $A_1(s)=A_2(s)$．したがって，$\gamma_1'(s)=\gamma_2'(s)$ となるから，この式の両辺を s で積分して $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$ に注意すると $\gamma_1(s)=\gamma_2(s)$ となり，2 つの曲線が一致することが確かめられた． □

9） ${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す．

この定理2.7を用いれば，例2.1 (12ページ)の結果から次が成り立つことがわかる．

系 2.8 曲率が一定の曲線は直線か円であり，そのときに限る．

与えられた曲率をもつ曲線は，存在すれば一意的であることは定理2.7からわかるが，ある関数を与えたとき，その関数を曲率とする曲線はいつでも存在するだろうか．その答えが次の定理である．

定理 2.9（**曲線論の基本定理**） 区間 $0 \leqq s \leqq l$ で定義されたなめらかな関数 $\kappa(s)$ （$0 \leqq s \leqq l$）に対して，s を弧長とし $\kappa(s)$ を曲率とする平面曲線 $\gamma(s)$ （$0 \leqq s \leqq l$）が存在する．さらにこのような曲線は回転と平行移動で写りあうものを除いてただ一つである．

［**証明**］ 一意性の部分は定理2.7である．車の運転で考えれば存在は直観的には明らかである．実際，曲率を最初に与えることは運転者がハンドルをどのように操作するかという情報を与えることだから，そのままこの操作法にしたがい単位速さで車を走らせれば，その軌跡が求める曲線ということになる．厳密な証明は次のようにすればよい： 与えられた関数 $\kappa(s)$ に対して

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^t \kappa(u)\ du\right),\ \sin\left(\int_0^t \kappa(u)\ du\right)\right) dt \tag{2.15}$$

とおけば，$d\gamma/ds$ を計算すると

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$$

となることがわかる．よって，s はこの曲線の弧長であり，さらに $d^2\gamma/ds^2$ を計算すると $\kappa(s)$ が曲率であることがわかる（節末問題の **6** 参照）[10]． □

10) フルネの公式を，単位接ベクトル，単位法線ベクトルの各成分を未知関数とする線形常微分方程式とみなして，その初期値問題に関する解の存在と一意性を用いて証明することもできる．§5で空間曲線に関する類似の定理（定理5.2）を証明するときにはこの方法を用いる．

卵形線の4頂点定理 この節の最後に，フルネの公式の閉曲線への応用例を1つ紹介しよう．

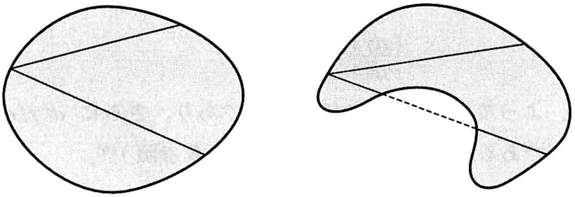
1周して元に戻るなめらかな曲線を**閉曲線**という．長さ l の閉曲線が $\gamma(s)$（$0 \leqq s \leqq l$）と弧長パラメータによって表示されているとき「閉曲線である」という条件は，$s=0$ と $s=l$ において γ の任意階数の微分が一致していることである．すなわち

$$(2.16) \quad \gamma(l)=\gamma(0), \quad \lim_{s\to+0}\gamma^{(n)}(s)=\lim_{s\to l-0}\gamma^{(n)}(s) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つことである．ただし $\gamma^{(n)}(s)$ は γ の s に関する n 階微分を表す．このとき $\gamma(s+l)=\gamma(s)$ と定めることにより γ は，$\boldsymbol{R}$ 全体で定義された周期 l のなめらかな関数に拡張することができる．さらに，曲率関数 $\kappa(s)$ も $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された周期 l の関数とみなすことができる．

自分自身と交叉しない閉曲線は**単純閉曲線**とよばれる．平面の単純閉曲線は，平面をその内部と外部の2つの領域に分けることが知られている（ジョルダン[11]の曲線定理[12]）．

単純閉曲線上の任意の2点を結ぶ線分が曲線の外部の点を含まないとき，その曲線を**卵形線**という（図2.6）．たとえば円や楕円は卵形線である．曲率関数が符号を変えない閉曲線は卵形線であることが知られている．（卵形線の特徴づけについては付録Bの定理2.1を参照されたい．）



卵形線　　　卵形線でない単純閉曲線　　　図2.6

11) Jordan, Camille (1838 - 1922).

12) ジョルダンの曲線定理は，折れ線（多角形）や，なめらかな曲線に対しては比較的容易に証明ができる [5]．連続曲線の場合の証明は，位相幾何学の教科書（たとえば [17]）を見よ．

一般に曲線の曲率 $\kappa(s)$ が極大値または極小値をとるような点を**頂点**という．なめらかな閉曲線の曲率関数は実数全体で定義された周期関数とみなせるが，その1周期のなかに少なくとも1つずつ最大値，最小値をとる点が存在する．すなわち，閉曲線は少なくとも2つの頂点をもつ．また，周期関数が1周期において極大値をとる点の個数と極小値をとる点の個数は，それらが有限個であれば等しいから，一般に閉曲線の頂点の個数は有限なら偶数になる(図2.7)．

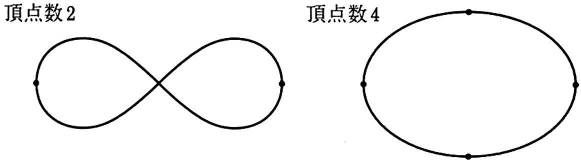


図2.7 閉曲線の頂点

卵形線の頂点について，次の定理が成り立つ．

定理 2.10 円でない卵形線には少なくとも4個の頂点が存在する．

この定理は**4頂点定理**とよばれ，1909年にインドのムコパディヤア[13]により発見された．その後，1912年にドイツのネーザー[14]により，卵形線とは限らない単純閉曲線にも少なくとも4個頂点があることが示された．§4で，この一般の場合の証明を紹介する(定理4.4)．

車の運転にたとえると，4頂点定理は「円でない立体交差のないサーキットを車で1周するには少なくとも4回ハンドルをまわす方向を変えなければならない」ということになる．例2.2で計算したように楕円はちょうど4つの頂点をもつので，定理2.10の4という数は最良であることがわかる．

[**定理 2.10 の証明**] 背理法により証明する．以下，頂点が2個であると仮定する．閉曲線が弧長をパラメータとして $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ と表示されているとす

13) Mukhopadhyaya, Syamadas (1866 - 1937).

14) Kneser, Adolf (1862 - 1930).

る．2つの頂点を $\gamma(0)$，$\gamma(v)$（$0<v<l$）とし，さらに，曲率関数 $\kappa(s)$ は $s=0$ で最大値，$s=v$ で最小値をとるとしても一般性を失わない．すると，区間 $[0,v]$ では $\kappa'(s)\leqq 0$，また区間 $[v,l]$ では $\kappa'(s)\geqq 0$ となる．とくに $\kappa'(s)$ が恒等的に0ならば $\kappa(s)$ は定数である．そのような閉曲線は円となり(系2.8)，仮定に反する．したがって $\kappa'(s)$ は恒等的に0ではない．

いま，2点 $\gamma(0)$ と $\gamma(v)$ を結ぶ直線の方程式を

$$ax+by+c=0 \qquad (a,b,c \text{ は定数}) \tag{2.17}$$

とおくと，この直線は $\gamma(0)$ と $\gamma(v)$ の間で卵形線の内部になければならないから，$\gamma(s)=(x(s),y(s))$ は (2.17) の直線で2分され，$0\leqq s\leqq v$ で一方の側，$v\leqq s\leqq l$ で反対側にあることがわかる．よって $ax(s)+by(s)+c$ は2つの区間 $[0,v]$ と $[v,l]$ では異なる符号をとる．以上より，$\kappa'(s)(ax(s)+by(s)+c)$ は $0\leqq s\leqq l$ で符号を変えず，また恒等的に0にはならないから，積分

$$J:=\int_0^l \kappa'(s)(ax(s)+by(s)+c)\,ds$$

は0にはならない．一方，部分積分と (2.11) から

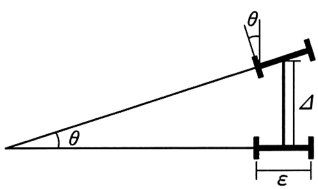
$$\begin{aligned} J &= -\int_0^l \kappa(s)(ax'(s)+by'(s))\,ds \\ &= \int_0^l (-ay''(s)+bx''(s))\,ds = \Big[-ay'(s)+bx'(s)\Big]_{s=0}^{s=l}=0 \end{aligned}$$

となり矛盾が生じた(上式の最後の結果は曲線が閉曲線であることによる)．　□

練 習 問 題 2

1. 平面の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対して左向きに直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．これらを列ベクトルとみなして横に並べて得られる2次行列 $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})$ の行列式の値は1であることを示せ．

2. 左右の車輪の距離が ε，前後の車軸の間の距離が Δ であるような自動車の前輪が正面から θ だけ傾いているとする(右図)．このとき車が描く軌跡の曲率を求めよ．



3. 曲線を ある直線に関して折り返すと曲率の符号は逆転することを証明せよ.

4. サイクロイド $\gamma(t) = (\,a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\,)$ $(\,0 \leqq t \leqq 2\pi\,)$ (練習問題1の**4**)について

（1） 区間 $[0, t]$ に対応する弧長 $s(t)$ とその逆関数 $t(s)$ を求めよ.

（2） $\gamma(t)$ の弧長パラメータによる表示 $\gamma(s)$ を求めて曲率を計算せよ.

5. 回転と平行移動で曲線の曲率が変わらないことを，直接計算で証明せよ.

6. 定理 2.9 の証明の中の式 (2.15) で与えられた曲線 $\gamma(s)$ について，s がその弧長で $\kappa(s)$ が曲率であることを確かめよ.

7. 弧長パラメータで表示された曲線 $\gamma(s)$ の単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s)$，左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(s)$，曲率を $\kappa(s)$ とすると，$s=0$ の近くで

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\,\boldsymbol{e}(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\,\boldsymbol{n}(0) + \frac{s^3}{6}\{-(\kappa(0))^2\boldsymbol{e}(0) + \kappa'(0)\,\boldsymbol{n}(0)\} + o(s^3) \qquad (\,s \to 0\,)$$

と表されることを示せ. ここで o はランダウの記号(付録 A-1 参照)である.

8*. （1） 2 つの曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(u)$ が点 P で 3 次の接触をするための必要十分条件は，γ_2 の助変数をうまく選べば $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(u_0) = \mathrm{P}$ かつ

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(t_0) = \frac{d\gamma_2}{du}(u_0)\,, \qquad \frac{d^2\gamma_1}{dt^2}(t_0) = \frac{d^2\gamma_2}{du^2}(u_0)\,, \qquad \frac{d^3\gamma_1}{dt^3}(t_0) = \frac{d^3\gamma_2}{du^3}(u_0)$$

が成り立つようにできることである. このことを示せ.

（2） 平面の領域 D から $\varphi(D)$ への微分同相写像 φ が与えられているとき，D 内の点 P で 3 次の接触をする 2 つの曲線 γ_1, γ_2 に対して，$\varphi\circ\gamma_1$ と $\varphi\circ\gamma_2$ は $\varphi(\mathrm{P})$ で 3 次の接触をすることを示せ.

（3） 曲線 $\gamma(s)$ が点 $\gamma(s_0)$ で曲率円と 3 次以上の接触をするための必要十分条件は，曲率の微分 $\kappa'(s_0)$ が 0 になることである. このことを示せ.

§ 3*. 閉　曲　線

連続的に変形しても変わらない閉曲線の性質を調べよう.

2つの閉曲線が「速度ベクトルが消えない」という性質を保ちながら, 一方から他方になめらかに変形できるとき, 互いに**同値**である[1]という. 正確には次のようにいえばよいだろう: 必要なら一方の曲線に助変数変換をほどこして, 2つの閉曲線が $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ と同じ助変数 s で表示されているとする[2]. このとき, γ_1 と γ_2 が同値であるとは, 次のような閉曲線の族 σ_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ が存在することである:

- 各 t に対して $\sigma_t(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ はなめらかな閉曲線で速度ベクトルが $\dfrac{d\sigma_t}{ds}(s) \neq 0$ をみたしている.
- $\sigma_0(s) = \gamma_1(s)$ かつ $\sigma_1(s) = \gamma_2(s)$. すなわち σ_t は t が0から1まで変化するのにしたがって曲線 γ_1 から γ_2 に変化する.
- $\sigma_t(s)$ は t, s に関して連続である.

任意の閉曲線は, この同値関係により図3.1のような曲線のどれかに同値になる. これを確かめるために, 閉曲線の回転数とよばれる量を導入する.

回転数　弧長をパラメータとする閉曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ の曲率を $\kappa(s)$ とするとき, その積分

$$i_\gamma := \frac{1}{2\pi}\int_0^l \kappa(s)\, ds$$

を閉曲線 $\gamma(s)$ の**回転数**とよぶ[3]. また, $\int_0^l \kappa(s)\, ds$ を**全曲率**という.

---

1) 正確には「正則ホモトピー同値である」という.

2) ここでは s は弧長パラメータであるとは仮定しない. 仮に γ_1 と γ_2 の弧長がともに s であったとしても, 以下に述べる変形の途中において s は弧長になるとは限らない.

3) 記号 i_γ は, 回転数(rotation index)の“i”による.

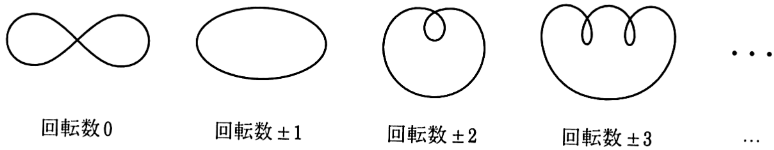


図 3.1　曲線の正則ホモトピー類

命題 3.1　閉曲線 γ の回転数 i_γ は整数である．

［**証明**］　弧長パラメータを用いて $\gamma(s)$ （$0 \leqq s \leqq l$）と助変数表示されている閉曲線は，§2 の定理 2.9 (21 ページ)の証明から，適当な回転と平行移動をほどこせば

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^t \kappa(u)\ du\right),\ \sin\left(\int_0^t \kappa(u)\ du\right) \right) dt$$

と表される．この式より

$$\gamma'(s) = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\ du\right),\ \sin\left(\int_0^s \kappa(u)\ du\right) \right)$$

が成り立つから，

$$\theta(s) := \int_0^s \kappa(u)\ du \tag{3.1}$$

は $\gamma'(s)$ と $\gamma'(0) = (1,0)$ のなす角を表していることがわかる．ここで，閉曲線の条件 (2.16) より $\gamma'(l) = \gamma'(0)$ であるから，$\theta(l) - \theta(0)$ は 2π の整数倍となる．したがって，i_γ は整数となる．□

回転数は整数値をとるから，この節のはじめで述べたような曲線の連続的な変形でその値は変わらない．したがって同値な曲線の回転数は一致する．しかし変形の途中で曲線の速度ベクトルが消えるような点が存在すると，そこでは曲率が定義されないため回転数が変化することがありうる．たとえば，図 3.2 のような変形では途中に速度ベクトルが消える曲線(図の (iii))が含まれている．左端の曲線は左回りの円で回転数 1 であるが，右端の曲線の回転数は 2 となって，最初の曲線と異なる回転数をもつ．

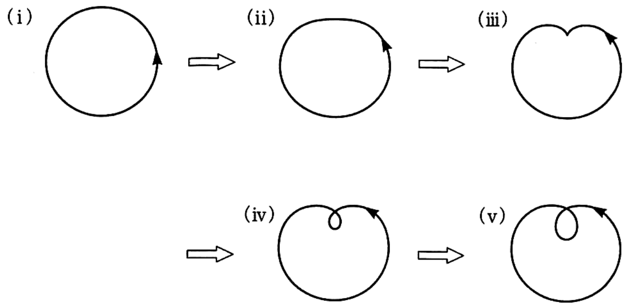


図 3.2　正則でない変形：　$\sigma_t(s):=(1-2t\sin s)(\cos s, \sin s)$　$(0 \leqq s \leqq 2\pi)$

平面上の原点を中心とする半径１の円(単位円)を S^1 で表す．弧長パラメータで表示された曲線 $\gamma(s)$ に対して，その接ベクトル $\gamma'(s)$ は単位ベクトルであるから，接ベクトルの始点を原点に平行移動することによって，$\gamma'(s) \in S^1$ と思ってよい．このようにして得られる対応

$$[0, l] \ni s \longmapsto \gamma'(s) \in S^1$$

を曲線の**ガウス写像**という．命題 3.1 の証明により，回転数は閉曲線上を１周するとき，ガウス写像が単位円を回る回転数である．とくに単純閉曲線については，次の定理が成立する．

定理 3.2　単純閉曲線の回転数は１または -1 である．

[**証明**]　直観的にはいかにも明らかそうな主張であるが，証明は単純ではない．

いま，x 軸に平行な直線をはるか下の方から上向きに平行移動して曲線に最初に接するときを考える．その直線を d，直線と曲線の接点のうち１つをＰとする(図3.3)．曲線は弧長 s により $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ と助変数表示され，$\gamma(0)=\gamma(l)=\mathrm{P}$ であるとして一般性を失わない．

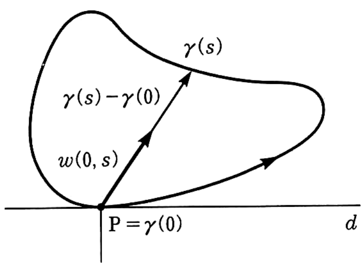


図 3.3

st 平面の閉領域 $\bar{D}:=\{(s,t)\mid 0\leqq s\leqq t\leqq l\}$ 上で定義された写像 w を

$$w(s,t):=\begin{cases}\gamma'(s) & (s=t\ \text{のとき}),\\ -\gamma'(0) & (s=0,\ t=l\ \text{のとき}),\\ \dfrac{\gamma(t)-\gamma(s)}{|\gamma(t)-\gamma(s)|} & (\text{その他の場合})\end{cases}$$

と定めると w は $\bar{D}$ から単位円 S^1 への連続写像となることがわかる．このとき $\bar{D}$ 上の連続関数 Θ で

$$w(s,t)=(\cos\Theta(s,t),\ \sin\Theta(s,t)),\qquad \Theta(0,0)=0$$

をみたすものがただ一つ存在する[4]．ここで $\gamma(l)=\gamma(0)$ より $w(s,l)=-w(0,s)$ が成り立つから $\Theta(s,l)-\Theta(0,s)=\pi\times(\text{奇数})$ となるが，s の関数 $\Theta(s,l)-\Theta(0,s)$ は連続なので，s に関係しないある整数 n が存在して，

$$(3.2)\qquad \Theta(s,l)-\Theta(0,s)=(2n+1)\pi \qquad (0\leqq s\leqq l)$$

と書ける．一方，$w(s,s)=\gamma'(s)$ であるから $\Theta(0,0)=0$ に注意すれば

$$\Theta(s,s)=\int_0^s \kappa(u)\,du$$

が成り立つ（27 ページの (3.1) 式参照）．したがって，上式と回転数の定義から，

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad 2\pi i_\gamma &=\Theta(l,l)-\Theta(0,0)=\{\Theta(0,l)+(2n+1)\pi\}-\Theta(0,0)\\ &=\{\Theta(0,l)+(2n+1)\pi\}\\ &\qquad\qquad +\{\Theta(0,l)-\Theta(0,0)-(2n+1)\pi\}-\Theta(0,0)\\ &=2\{\Theta(0,l)-\Theta(0,0)\}\end{aligned}$$

を得る．ところが P の取り方により，P から y 軸に平行で下向きに延びる半直線と曲線は交わらないので，$w(0,s)$ は $(0,-1)$ にならない（図 3.3）．したがって

$$\Theta(0,s)+\frac{\pi}{2}\neq 2\pi m \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

となる．ここで $\Theta(0,0)=0$ であったから，s の関数 $\Theta(0,s)$ の連続性により

4）このような Θ の存在は，$\bar{D}$ の単連結性より，被覆空間の概念を用いて示すのが普通である．しかし $w(s,t)$ が C^1 級である（節末問題の **2**）ことに注意すれば，$w_1:=\partial w/\partial s$，$w_2:=\partial w/\partial t$ とおいて

$$\Theta(s,t)=\int_0^s \det(w(u,t),\ w_1(u,t))\,du+\int_0^t \det(w(0,v),\ w_2(0,v))\,dv$$

とすれば，これが求める Θ となることが，単連結性や被覆空間などの難しい概念を使わずにわかる（節末問題の **3** を参照せよ）．

$-\pi/2 < \Theta(0,s) < 3\pi/2$（$0 \leqq s \leqq l$）が成り立つ．さらに (3.2) より，

$$\Theta(0,l) - \Theta(0,0) = \pm\pi$$

となり，(3.3) より $i_\gamma = \pm 1$ であることが示された． □

定理 3.3（**ホイットニー**[5]**の定理**） 2つの閉曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ が，この節のはじめに述べたような意味で同値（正則ホモトピー同値）であるための必要十分条件は，これらの回転数が等しいことである．

［**証明**］ 必要性は明らかである．逆に，閉曲線 γ_1 と γ_2 の回転数が等しく

$$i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2} = m$$

であるとしよう．相似変換は回転数を変えないから，これらの曲線の長さはともに 1 で $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$（$0 \leqq s \leqq 1$）と弧長によりパラメータ表示されているとして一般性を失わない．曲線 γ_1, γ_2 の曲率をそれぞれ $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ とすると，曲線論の基本定理 2.9 の証明から，$\gamma_j(0) = 0$ かつ

$$\gamma_j(s) = \int_0^s (\cos\theta_j(u),\ \sin\theta_j(u))\,du\,,$$

$$\theta_j(s) := \int_0^s \kappa_j(u)\,du \qquad (j = 1, 2)$$

としてよい．κ_1, κ_2 は周期が 1 の関数だから，回転数の定義より

$$\theta_j(s+1) = \int_0^1 \kappa_j(u)\,du + \int_1^{s+1} \kappa_j(u)\,du = 2\pi m + \theta_j(s) \qquad (j = 1, 2) \tag{3.4}$$

となる．ここで $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす t に対して

$$\varphi_t(s) = (1-t)\,\theta_1(s) + t\,\theta_2(s) \tag{3.5}$$

とおけば (3.4) より $\varphi_t(s+1) = \varphi_t(s) + 2\pi m$ が成り立つ．これを用いて

$$\boldsymbol{v}_t(s) := (\cos\varphi_t(s),\ \sin\varphi_t(s))\,,$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_t(s) := \boldsymbol{v}_t(s) - \int_0^1 \boldsymbol{v}_t(u)\,du\,,$$

$$\sigma_t(s) := \int_0^s \tilde{\boldsymbol{v}}_t(u)\,du$$

とおけば，各 t に対して $\boldsymbol{v}_t, \tilde{\boldsymbol{v}}_t, \sigma_t$ は周期 1 をもつことが順をおって確かめられ

5） Whitney, Hassler (1907 - 1989).

るから，σ_t は閉曲線を与える．$\gamma_j(0)=0$ より，$t=0,1$ のとき $\tilde{\boldsymbol{v}}_t=\boldsymbol{v}_t$ となるので，$\sigma_0=\gamma_1$，$\sigma_1=\gamma_2$．したがって，σ_t は γ_1 から γ_2 への変形を与えている．あとは変形の途中で $\tilde{\boldsymbol{v}}_t=d\sigma_t/ds\neq 0$ を示せばよい．定義より

$$\frac{d\,\sigma_t(s)}{ds}=\tilde{\boldsymbol{v}}_t(s)=\boldsymbol{v}_t(s)-\int_0^1\boldsymbol{v}_t(u)\,du$$

であるが，積分の三角不等式(付録 A-1 の定理 1.4 参照)より

$$\left|\int_0^1\boldsymbol{v}_t(u)\,du\right|\leqq\int_0^1|\boldsymbol{v}_t(u)|\,du=1 \tag{3.6}$$

となり，等号が成立するためには $\boldsymbol{v}_t(s)$ （$0\leqq s\leqq 1$）が定ベクトルとならなければならない．(ここで $|\boldsymbol{v}_t|=1$ であることを用いた．)

回転数 m が 0 でないときは，s が 0 から 1 まで変化するとき，(3.5) により φ_t が 0 から $2\pi m$ まで変化するので，$\boldsymbol{v}_t$ は定ベクトルではありえない．したがって (3.6) で等号は成立せず

$$\left|\frac{d\sigma_t}{ds}\right|\geqq|\boldsymbol{v}_t|-\left|\int_0^1\boldsymbol{v}_t(u)\,du\right|>|\boldsymbol{v}_t|-1=0$$

となって，$d\sigma_t/ds\neq 0$ がわかる．

次に，回転数 m が 0 のときを考える．もし $\boldsymbol{v}_t$ が定ベクトルならば φ_t は恒等的に 0 でなければならない．このとき $\varphi_t(s)=(1-t)\,\theta_1(s)+t\,\theta_2(s)$ がすべての s に対して 0 にならなければならないから，θ_1 と θ_2 は比例しなければならない．もし θ_1 と θ_2 が比例しているなら，γ_2 をほんの少し変形させれば 2 つの関数が比例しないようにできるので，t の変化に対して $\boldsymbol{v}_t$ は定ベクトルでないとしてよい．このとき，上と同様にして $d\sigma_t/ds\neq 0$ を示すことができる． □

定理 3.3 から曲線の回転数の意味が明らかになった．とくに図 3.1 の曲線のうち，左端はレムニスケートと同値なので節末問題の **1** より回転数は 0 である．また，それ以外の曲線は円を有限回まわる曲線と同値になるので，回転数が求められる．C^1 級の閉曲線 $\gamma(s)$ （$0\leqq s\leqq l$）についても $\gamma'(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ をみたす連続関数 $\theta:[0,l]\to\boldsymbol{R}$ の存在が示せるので，$2\pi i_\gamma:=\theta(l)-\theta(0)$ で回転数が定義できる．定理 3.2, 3.3 の証明を少し変更すれば C^1 級の場合にも同じことがいえる．

発展 交点数と回転数(ホイットニーの公式)*

一般に与えられた曲線の回転数を具体的に計算するのは難しいが，曲線の自己交叉を数え上げることによって回転数が得られる公式が知られている．それがここに紹介するホイットニーの公式(定理3.4)である．

閉曲線が自分自身と交わる点を**自己交叉**または**自己交点**とよぶ．自己交叉が有限個で，各自己交叉において曲線の2つの断片が接することなく交わるとき，この曲線を**ジェネリック**(generic)であるという(図3.4)．任意の閉曲線は，少し変形させることによりジェネリックな曲線にすることができることが知られている[6]．

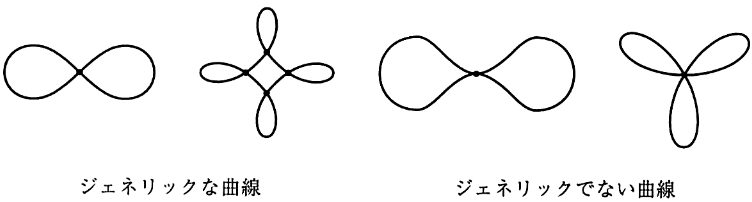


図3.4

向きのついた曲線上に1点Pを取り，Pから出発してはじめて自己交叉Qを通るとき，進む方向から見てもう1つの曲線の断片が左から右に横切るならば，その点Qを(Pを基点としたときの)**正交点**，右から左に横切るならば**負交点**という(図3.5)．

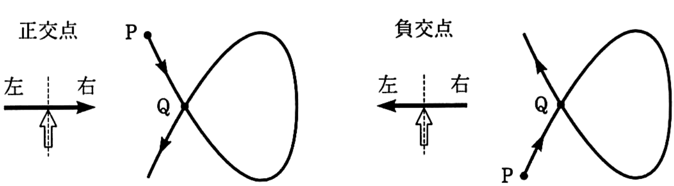


図3.5

6) たとえば，[14]の48ページ．

このように自己交叉Qに符号をつけたとき，

$$\mathrm{sgn}_\gamma(\mathrm{Q}) = \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}) := \begin{cases} +1 & (\text{QがPを基点とした正交点であるとき}), \\ -1 & (\text{QがPを基点とした負交点であるとき}) \end{cases}$$

と書くことにする[7]．

交点の符号の定義は基点Pの取り方による．また，曲線の向きを変えると交点の符号が逆になることに注意しておこう．

定理 3.4（ホイットニー）　ジェネリックな閉曲線 γ 上の点Pで，進行方向に向かって右手に無限遠方を見るようなものをとる[8]．このとき，曲線 γ の回転数 i_γ は

$$i_\gamma = 1 + \sum \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q})$$

で与えられる．ただし，$\sum$ は γ の自己交叉Qのすべてにわたってとる．

定理を証明するために，次の補題を用意しておく．

補題 3.5　ジェネリックな閉曲線 γ と単純閉曲線 σ が有限個の点で接することなく交わっていて，σ 上には γ の自己交叉がないものとする．このとき，γ と σ が交わる点Qにおいて γ の進行方向に対して σ が左側から右側へ交叉するとき，$\mathrm{sgn}_{\gamma,\sigma}(\mathrm{Q}) = +1$，右側から左側へ交叉するとき，$\mathrm{sgn}_{\gamma,\sigma}(\mathrm{Q}) = -1$ とすると，次が成り立つ：

$$\sum_{\mathrm{Q}:\,\gamma\text{上の}\sigma\text{との交点}} \mathrm{sgn}_{\gamma,\sigma}(\mathrm{Q}) = 0\,.$$

［**証明**］　単純閉曲線 σ は平面をその内部と外部に分ける．いま σ には内部を左側に見るように向きが入れられているとする．曲線 γ が点Qで σ の外側から内側に向かって σ と交叉しているなら $\mathrm{sgn}_{\gamma,\sigma}(\mathrm{Q}) = +1$，内側から外側に向かって交叉しているなら $\mathrm{sgn}_{\gamma,\sigma}(\mathrm{Q}) = -1$ であるが，これらの交点は γ 上で交互にあらわれるので結論を得る．□

7）記号“sgn”は符号 signature の略である．

8）必要なら曲線の向きを逆転させれば，このような点を必ず見つけることができる．

［**定理 3.4 の証明**］ γ が単純閉曲線の場合は，P の取り方から，曲線は内部を左側に見る向きづけなので $i_\gamma = 1$ となり主張が得られる．そこで γ が少なくとも 1 つ自己交叉をもつとすると，γ は少なくとも 1 つ自己交叉のないループをもつ．

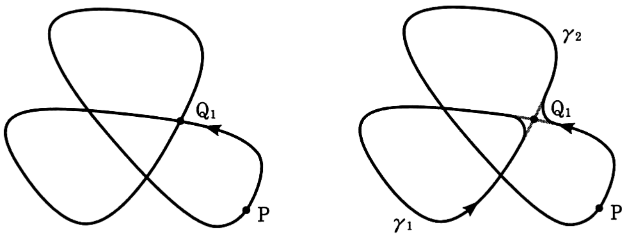


図 3.6

自己交叉が $n-1$ 個の曲線については定理が成立すると仮定し，自己交叉が n の場合を考える．基点 P を出発して，初めて出会う自己交叉のないループの角(かど)を Q_1 とし，Q_1 が正交点〔負交点〕とする．点 Q_1 からそのまま進んでふたたび Q_1 に戻るループの角を（C^∞ 級で）丸めてできる単純閉曲線を γ_1 とし，Q_1 を右折〔左折〕してふたたび Q_1 に戻るループの角を丸めてできる閉曲線を γ_2 とする（図 3.6．角を丸める方法については付録 B-5 の命題 5.7 参照）．丸めた部分の曲率の積分は，交点の丸めた部分の角度の変化に等しいので，γ_1 と γ_2 で打ち消し合い，$i_\gamma = i_{\gamma_1} + i_{\gamma_2}$ が成り立つ．一方，γ_1 は単純閉曲線で，その回転数は Q_1 における自己交叉の符号に等しいから，帰納法の仮定より，

$$i_\gamma = i_{\gamma_1} + i_{\gamma_2} = \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}_1) + i_{\gamma_2} = \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}_1) + 1 + \sum_{\mathrm{Q}:\,\gamma_2\text{の自己交叉}} \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma_2}(\mathrm{Q})$$

となる．一方，補題 3.5 より γ_2 上の γ_1 との交点の符号の総和は 0 になるので

$$\sum_{\mathrm{R}:\,\gamma_2\text{上の}\,\gamma_1\text{との交点}} \mathrm{sgn}_{\gamma_2,\gamma_1}(\mathrm{R}) = 0\,.$$

よって

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathrm{Q}:\,\gamma\text{の自己交叉}} \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}) \\
&\quad = \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}_1) + \sum_{\mathrm{R}:\,\gamma_2\text{上の}\,\gamma_1\text{との交点}} \mathrm{sgn}_{\gamma_2,\gamma_1}(\mathrm{R}) + \sum_{\mathrm{S}:\,\gamma_2\text{の自己交叉}} \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma_2}(\mathrm{S}) \\
&\quad = \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma}(\mathrm{Q}_1) + \sum_{\mathrm{S}:\,\gamma_2\text{の自己交叉}} \mathrm{sgn}_{\mathrm{P},\gamma_2}(\mathrm{S}) = i_\gamma - 1
\end{aligned}$$

となり定理が示された． □

例 3.6 具体例で回転数を計算してみよう．図 3.7 の左側の曲線はちょうど 3 つの自己交叉をもっているが，P を基点とするとき，交点の符号は順に $+, -, +$ である．したがって定理 3.4 より回転数は $1+(1-1+1)=2$ である．一方，右側の曲線の自己交叉の符号は $+$ であるから，回転数は 2 である．ゆえに定理 3.3 よりこれらの 2 つの曲線は，この節のはじめに述べた意味で同値(正則ホモトピー同値)である．なめらかな変形を絵に描いて確かめてみよ． ◇

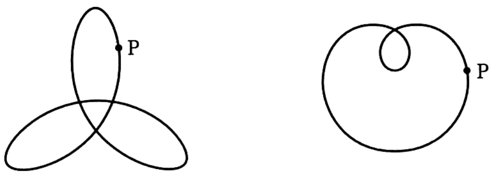


図 3.7

練 習 問 題 3

1. 楕円の回転数とレムニスケートの回転数を定義から直接求めよ．

2*. (1) $\boldsymbol{R}$ 上で定義された C^2 級関数 $f(t)$ に対して

$$F(s,t) := \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} & (s \neq t \text{ のとき}), \\ f'(s) & (s = t \text{ のとき}) \end{cases}$$

と $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 F を定義する．このとき，$s \neq t$ のときは

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = \frac{1}{2} f''(s+\theta(t-s)) \qquad (0<\theta<1)$$

をみたす $\theta=\theta(s,t)$ が存在し，また $s=t$ のときは

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,s) = \frac{1}{2} f''(s)$$

となることを示せ．このことを用いて F が $\boldsymbol{R}^2$ 上で C^1 級であることを示せ．

(2) 長さ l の，弧長をパラメータとする C^2 級の単純閉曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ を $\boldsymbol{R}$ 上で周期 l をもつように拡張しておく．このとき

$$\tilde{w}(s,t)=\begin{cases} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\dfrac{|t-s|}{|\gamma(t)-\gamma(s)|} & (s-l<t<s+l,\ s\neq t),\\ \gamma'(s)\left(=\dfrac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}\right) & (s=t),\\ -\dfrac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-(s+l)}\dfrac{|t-(s+l)|}{|\gamma(t)-\gamma(s)|} & (s+l<t<s+2l,\ s\neq t),\\ -\gamma'(s) & (s+l=t) \end{cases}$$

と定めると $\tilde{w}$ は領域 $\{(s,t)\mid s-l<t<s+2l\}$ で C^1 級であり，$\tilde{w}$ を $\bar{D}=\{(s,t)\mid 0\leqq s\leqq t\leqq l\}$ に制限すると定理3.2の証明における w と一致することを示せ．

3*. 正の定数 l に対して st 平面の閉領域 $\bar{D}=\{(s,t)\mid 0\leqq s\leqq t\leqq l\}$ 上で定義された C^1 級写像 $w:\bar{D}\to\boldsymbol{R}^2$ が $|w(s,t)|=1$，$w(0,0)=(1,0)$ をみたしているとき，$w(s,t)=(\cos\Theta(s,t),\ \sin\Theta(s,t))$ かつ $\Theta(0,0)=0$ をみたす $\bar{D}$ 上の連続関数 Θ が存在することを次のようにして示せ：

（1） 0を含む区間 I から $\boldsymbol{R}^2$ への C^1 級写像 $\boldsymbol{e}:I\ni s\longmapsto\boldsymbol{e}(s)\in\boldsymbol{R}^2$ が $|\boldsymbol{e}(s)|=1$ を常にみたしているとする．さらに $\boldsymbol{e}(0)=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ ならば，

$$\theta(s):=\int_0^s\det(\boldsymbol{e}(u),\boldsymbol{e}'(u))\,du+\alpha$$

とおけば，$\boldsymbol{e}(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ が成り立つことを示せ．

（2） $0\leqq t\leqq l$ に対して

$$\theta(t):=\int_0^t\det(w(0,v),w_2(0,v))\,dv\qquad\left(w_2=\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

と定めると，$w(0,t)=(\cos\theta(t),\sin\theta(t))$ が成り立つことを示せ．

（3） $(s,t)\in\bar{D}$ に対して

$$\Theta(s,t)=\int_0^s\det(w(u,t),w_1(u,t))\,du+\int_0^t\det(w(0,v),w_2(0,v))\,dv$$

$$\left(w_1=\frac{\partial w}{\partial s},\ w_2=\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

と定めると，これが求めるものであることを示せ．

§4*. うずまきの幾何

うずまき線の代表例として「アルキメデスのうずまき線」と「対数うずまき線」を紹介しよう.

アルキメデスのうずまき線 平面の極座標 (r, θ) を用いて

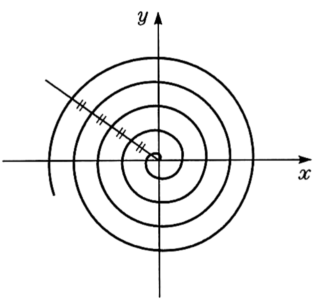
$$r = a\theta \qquad (a > 0 \text{ は定数}, \ \theta > 0)$$

と表される曲線を**アルキメデスのうずまき線**とよぶ(図4.1左). ろくろで平らな粘土板を等速回転させて中心から一定の速さでまっすぐに釘を動かして線を描くと, 粘土板にはこのうずまき模様ができる. ギリシア時代, アルキメデス[1]によってこのうずまき線の性質が調べられた(節末問題の**1**参照).

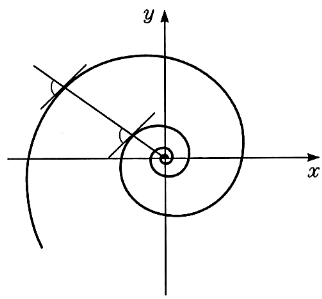
対数うずまき線 極座標 (r, θ) を用いて,

$$r = a^{\theta} \qquad (a > 1 \text{ は定数})$$

と表されるうずまき線を**対数うずまき線**とよぶ. この曲線と中心から伸ばした半直線がなす角は一定である(図4.1右).



アルキメデスのうずまき線



対数うずまき線

図4.1

1) Archimedes (B.C. 287 - B.C. 212).

巻き貝の模様や星雲の形など，自然界で見ることができるうずまき線の多くは対数うずまき線である．この曲線は，拡大・縮小を行っても元の曲線と合同になるという性質(自己相似性)をもつ(節末問題の **2** 参照)．

本書では，曲率関数の導関数が0にならないような曲線のことを**うずまき線**とよぶことにする．そのうち，曲率関数が単調増加であるような曲線を**正のうずまき線**，曲率関数が単調減少であるような曲線を**負のうずまき線**とよぶ(図4.2)．

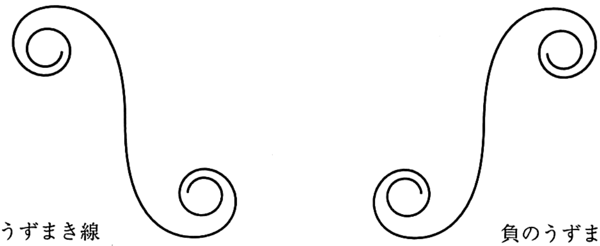


図4.2

正のうずまき線を鏡に映すと負のうずまき線になるが，回転と平行移動で曲率は変わらない(§2の定理2.7)ので，裏返さない限り，正のうずまき線は負のうずまき線に重ね合わせることはできない．

うずまき状の道路があったとして，その上を走る車の運転者の立場をとれば，標語的には

正のうずまき線 ＝ ハンドルを左に回し続ける，

負のうずまき線 ＝ ハンドルを右に回し続ける

ということができる．

うずまき線の正負は進行方向に関係ないことに注意しよう(図4.2)．実際，$\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ を弧長パラメータで表された正のうずまき線とすると，この曲線の曲率関数 $\kappa(s)$ は単調増加である．ここで $\gamma(s)$ の向きを反対にした曲線

$$\sigma(s) := \gamma(l-s) \qquad (0 \leqq s \leqq l)$$

を考えると(このとき $\kappa(l-s)$ は単調減少),この曲線の曲率関数 $\tilde{\kappa}(s)$ は,式 (2.6) (12 ページ)より

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}(s) &= \det(\sigma'(s), \sigma''(s)) \\ &= -\det(\gamma'(l-s), \gamma''(l-s)) = -\kappa(l-s)\end{aligned}$$

となって,また単調増加になる.すなわち,正のうずまき線の進行方向を逆にした曲線も正のうずまき線である(節末問題の **3** 参照).

うずまき線について,次の定理を示そう(図 4.3).

定理 4.1 正の〔負の〕うずまき線 $\gamma(s)$ の各点の曲率円に曲線の向きに同調するような向きをつける.このとき $\gamma(s)$ は曲率円の右から左へ〔左から右へ〕接するように交わる.

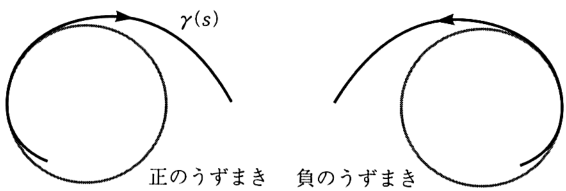


図 4.3 うずまき線と曲率円

[証明] 正の〔負の〕うずまき道路を走る車の運転者は,いつもハンドルを左に〔右に〕回し続けている.途中でハンドルを止めると,車は円運動をしてその点における曲率円を描く.したがって,車はこの円の右から左へ〔左から右へ〕接するように交わることは直観的に理解できるだろう.

厳密な証明を行う.正のうずまき線 $\gamma(s)$ 上の点 $\gamma(s_0)$ を原点,$\gamma'(s_0)$ を x 軸の方向,単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$ を y 軸の方向になるように座標軸をとると,この曲線は,関数 $y=f(x)$ のグラフで表すことができる(15 ページ参照).とくに $f(0)=0$,$\dot{f}(0)=\dfrac{df}{dx}(0)=0$ であるから,この曲線の原点における曲率とその微分は (2.8) より

$$\kappa(0) = \frac{\ddot{f}(0)}{(1+\dot{f}(0)^2)^{3/2}} = \ddot{f}(0)\,, \qquad \dot{\kappa}(0) = \dddot{f}(0)$$

となるので，テイラーの定理(付録Aの定理1.1)より

$$f(x) = \frac{1}{2}\kappa(0)x^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}(0)x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0) \tag{4.1}$$

と表すことができる．ただし $o(x^3)$ はランダウの記号である．一方，曲線 $y = f(x)$ の原点における曲率円が $y = g(x)$ のグラフで表されているとすればその曲率は定数だから (4.1) の f を g に取り換えれば

$$g(x) = \frac{1}{2}\kappa(0)x^2 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

となる．したがって，

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{6}\dot{\kappa}(0)x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

となるが，正のうずまき線であることから $\dot{\kappa}(0) > 0$ なので，x が増加するとき $f(x) - g(x)$ は原点を境に負から正に符号を変えることがわかった．これは $\gamma(s)$ が曲率円の右から左へ接するように交わることを意味している． □

うずまき線をうずまき線に写す変換　座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ と同一視する．複素数 a, b, c, d （$ad - bc \neq 0$）を用いて平面上の点 $z \in \boldsymbol{C}$ を

$$z \longmapsto w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{4.2}$$

で与えられる $w \in \boldsymbol{C}$ に写す変換 T を**メビウス変換**または**1次分数変換**という．$c \neq 0$ のとき，メビウス変換 (4.2) は $z = -d/c$ で定義されないが，その点を除いた領域から $\boldsymbol{C}$ の中への微分同相写像を与えている．メビウス変換の合成，メビウス変換の逆写像はまたメビウス変換になる．

メビウス変換は次の4つの基本的な変換の合成で表される(節末問題の**5**参照)．

$$\begin{cases} \text{平行移動} & z \longmapsto z + d \quad (d \in \boldsymbol{C}), \\ \text{回転} & z \longmapsto e^{i\theta}z \quad (\theta \in \boldsymbol{R}), \\ \text{拡大・縮小} & z \longmapsto rz \quad (r \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}), \\ \text{共役と反転の合成} & z \longmapsto 1/\bar{z}. \end{cases} \tag{4.3}$$

定理 4.2　メビウス変換によって，正のうずまき線は正のうずまき線に，負のうずまき線は負のうずまき線に写される．さらに，この対応で，元の曲線の曲率円は，写った先の曲線の対応する点における曲率円に写される．

たとえば，対数うずまき線を，変換 $z \mapsto 1/z$ によって写すと，元の対数うずまき線と合同な曲線になる．

定理 4.2 を示すために，まず，次の補題を用意する．

補題 4.3　メビウス変換によって円は円に写される．さらに円の左側の領域は，写った先の円の左側の領域に写される．ただし，直線は半径無限大の円と解釈する．

［**証明**］ 最初の 3 つの変換について補題の主張は明らかだから，変換 $z \mapsto 1/z$ が補題に述べた性質をもつことを示す．xy 平面上の円は一般に

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0 \qquad (a, b, c, d \in \boldsymbol{R},\ b^2+c^2-ad>0) \tag{4.4}$$

という形に表すことができる．とくに $a=0$ のときは直線を表す．これが変換 $z \mapsto 1/z$ で円に写されることを示せばよい．(4.4) を $z=x+iy$ （$i=\sqrt{-1}$）として書き換えると

$$a|z|^2+(b-ic)z+(b+ic)\bar{z}+d=0 \qquad (\bar{z}=x-iy)$$

となるが，$w=1/z$ とおけば

$$A|w|^2+(B-iC)w+(B+iC)\bar{w}+D=0$$
$$(A=d,\ B=b,\ C=-c,\ D=a)$$

と書ける．とくに $B^2+C^2-AD=b^2+c^2-ad>0$ であるから，写った先の曲線も円であることがわかった．ただし，元の円の中心は写った先の円の中心に写るとは限らないことに注意しておく．

与えられた円の左側の領域が，写った先の円の左側の領域に写ることは次のようにしてわかる：まず，平行移動と回転でこの性質が保たれることに着目する．すると，原点を中心とする円と，原点を通る直線についてのみ，変換 $z \mapsto 1/z$ に対してこの性質を調べればよい．これは直接確かめることができる．　□

［**定理 4.2 の証明**］ 弧長をパラメータとする曲線 $\gamma(s)$ が正のうずまき線であったとすると，曲率関数 $\kappa(s)$ は $\kappa'(s)>0$ をみたしている．いま，$z\mapsto T(z)$ をメビウス変換とする．このとき，曲線 γ 上の点 $\gamma(s)$ における曲率円 C_s を考えると，補題 4.3 により，$T(C_s)$ は円である．定理 2.4 により，C_s は曲線 $\gamma(s)$ と 2 次の接触をしている．T は微分同相写像であり，系 2.8 より接触の次数は微分同相写像で保たれるから円 $T(C_s)$ は曲線 $T\circ\gamma(s)$ と 2 次の接触をしていることがわかる．$\kappa'(s)=0$ となる点は，C_s と γ が 3 次の接触をする点である（練習問題 2 の **8** (3) 参照）．1 次，2 次の接触の場合と同様に，3 次の接触をするという性質はメビウス変換によって保存される（練習問題 2 の **8** (2) 参照）．したがって，もし $T\circ\gamma$ 上に曲率関数の微分が消える点が存在したとすると，円 $T(C_s)$ は曲線 $T\circ\gamma$ と s において 3 次の接触をすることになり，T の逆変換をほどこすことにより，円 C_s は曲線 γ と s において 3 次の接触をするので $\kappa'(s)=0$ となり，うずまき線の性質 $\kappa'\neq 0$ に反する．したがって，$T\circ\gamma$ の曲率関数は単調増加か単調減少となるから，$T\circ\gamma$ はうずまき線である．さらに，$\gamma(s)$ は正のうずまき線であったから，定理 4.1 により γ は s において C_s の右から左へ接するように交わる．このことは，$T\circ\gamma$ も正のうずまき線であることを意味している． □

これらのうずまき線の性質を利用すると，（卵形線とは限らない）単純閉曲線について，4 頂点定理が成り立つことを証明することができる．

定理 4.4 単純閉曲線上には，少なくとも 4 個の頂点が存在する．

［**証明**］ 閉曲線の弧長によるパラメータ表示を $\gamma(s)$ とする．§2 の定理 2.10 の証明と同様に，頂点の個数が 2 であると仮定して矛盾を導けばよい．いま，2 つの頂点を P, Q とする．曲線上を P から Q へ向かう経路を γ_1，Q から P へ向かう経路を γ_2 とすれば，γ_1,γ_2 の曲率関数は一方が単調増加で他方が単調減少であるから，一般性を失うことなく，γ_1 は正のうずまき線，γ_2 は負のうずまき線としてよい．いま P における γ の曲率円を C とする．頂点の個数を 2 としたから γ は円ではないので，C 上の点で γ 上にない点 O をとることができる．さらに，この O が原点であったとして一般性を失わない．ここで $T(z)=1/z$ なるメビウス変換をほどこすと $T(C)$ は無限遠点を通る円となるから直線である．一方，$T(C)$

は $T(\mathrm{P})$ における $T\circ\gamma$ の曲率円のはずだから，$T\circ\gamma$ は P において曲率が 0 になることがわかる．定理 4.2 より $T\circ\gamma_1$ 上では曲率は単調増加なので，$T\circ\gamma_1$ 上で曲率は 0 以上，また，$T\circ\gamma_2$ 上では曲率が単調減少になるので，$T\circ\gamma_2$ 上でも曲率は 0 以上である．よって $T\circ\gamma$ 上で曲率は負にならない．すると $T\circ\gamma$ は卵形線となる（付録 B の定理 2.1）が，これは卵形線の 4 頂点定理 2.10 に反する． □

頂点の性質のより進んだ話題については [27], [28] を参照されたい．

うずまき線の大域的性質　正のうずまき道路を走る車を考えよう．もしも運転者が途中でハンドルを止めてしまうと，車は円運動をする．その円が曲率円であるから，ハンドルを左に回し続けることで，車はさらにその円の内側に突入していくわけである．すると，さらに先に進んだときの曲率円は，現在の曲率円の中にすっぽり入っていることが直観的に予測できるだろう．以下の定理はうずまき線を理解する上で大変重要である．

定理 4.5　$\gamma(s)$ （$a \leqq s \leqq b$）を弧長パラメータで表された正の〔負の〕うずまき線とし，各点 s における曲率円の左側〔右側〕にある開領域を D_s とすると，

$$\bar{D}_b \subset D_a$$

が成り立つ．ただし，$\bar{D}_b$ は D_b の閉包である[2)]．とくにうずまき線は自己交叉をもたない．

［**証明**］ $\kappa(a) > 0$ として一般性を失わない．実際，$\kappa(a) \leqq 0$ のとき $\gamma(s)$ の $s = a$ における曲率円 C_a は時計回りの円であるが，C_a の右側の領域から C_a 上にない点 O をとり，それを原点としてメビウス変換 $T(z) = 1/z$ をほどこすと，$T(C_a)$ は反時計回りの円になり，$T\circ\gamma(s)$ の $s = a$ における曲率は正となる．

以下 $\kappa(a) > 0$ とし，正のうずまき線の場合を証明する．$\gamma(s)$ の曲率円の中心の軌跡[3)]を $\sigma(s)$ で表す：

2）すなわち，$\bar{D}_b$ は D_b とその境界点全体の和集合である．

3）曲率円の中心の軌跡を縮閉線という．性質については，付録 B-1 を参照されたい．

$$\sigma(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s).$$

この式の両辺を微分すると (2.12) を用いれば $\sigma'(s) = (1/\kappa(s))'\boldsymbol{n}(s)$ となる．また $s=a$，$s=b$ における曲率円の半径をそれぞれ r_a, r_b とすると，積分の三角不等式（付録 A-1 の定理 1.4）より

$$|\sigma(b)-\sigma(a)| = \left|\int_a^b \sigma'(s)\,ds\right| = \left|\int_a^b \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\boldsymbol{n}(s)\,ds\right|$$
$$\leqq \int_a^b \left|\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'\boldsymbol{n}(s)\right| ds = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)} = r_a - r_b$$

を得る．ここで，$|\sigma(b)-\sigma(a)| = r_a - r_b$ とするとこの不等式の等号条件より $\boldsymbol{n}(s)$ が定ベクトルであることがわかるが，これは $\gamma(s)$ の曲率が単調増加であることに反する．よって $|\sigma(b)-\sigma(a)| < r_a - r_b$ が成り立つが，これは 2 つの曲率円の中心の距離 $|\sigma(b)-\sigma(a)|$ より半径の差 $r_a - r_b$ の方が大きいことを意味し，C_b は C_a の中にすっぽり入るから $\bar{D}_b \subset D_a$ が示された． □

練習問題 4

1. アルキメデスのうずまき線 $r = a\theta$ の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$（$\beta - \alpha < 2\pi$）と $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ の半直線で囲まれる部分の面積が $a^2(\beta^3 - \alpha^3)/6$ であることを証明せよ．この事実はアルキメデス自身によって発見された．

2. 対数うずまき線を原点を中心として拡大すると，もとの対数うずまき線と原点を中心とする回転で重ね合わせることができることを示せ．とくに，原点から伸ばした半直線と対数うずまき線のなす角は一定である．

3. うずまき線の正負が，曲線の向きによらないことを，車の運転の例を用いて説明せよ．

4. アルキメデスのうずまき線と対数うずまき線の曲率関数を求めよ．

5. 任意のメビウス変換は (4.3) の 4 つの変換の合成で表されることを証明せよ．

6*. 対数うずまき線の曲率円の中心の軌跡（縮閉線．付録 B-1 参照）は対数うずまき線であることを証明せよ．

§5. 空 間 曲 線

この節では空間曲線について考えよう．予備知識として空間ベクトルのベクトル積(外積)の概念が必要となるので付録 A-3 を参照されたい．

空間曲線　空間の曲線を助変数 t を用いて，

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

と表すことにしよう．平面曲線の場合と同様に $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ が常に成り立つような助変数表示を考える．

区間 $[a, t]$ に対応する部分の曲線の長さ(弧長)は，

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}\, du$$

で与えられる．平面曲線の場合と同様に，空間曲線を弧長パラメータ s で表示することができる．

以下，曲線 $\gamma(s)$ は弧長パラメータ s で助変数表示されているとする．パラメータ s についての微分を“ ′ ”で表すと

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$$

は大きさ 1 の単位ベクトルである．これを空間曲線の**単位接ベクトル**とよぶ．式 $\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = 1$ の両辺を s で微分すると

$$\boldsymbol{e}'(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = 0,$$

すなわち $\boldsymbol{e}'(s)$ は単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$ に直交することがわかる．平面曲線の場合は曲線に直交する方向がただ一つに定められたが，空間曲線の場合はそうはいかない．いま $\boldsymbol{e}'(s) \neq 0$ のとき，

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{\boldsymbol{e}'(s)}{|\boldsymbol{e}'(s)|} \left(= \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} \right)$$

とおいて，これを曲線 γ の**主法線ベクトル**とよぶ．$\boldsymbol{n}(s)$ は $\boldsymbol{e}(s)$ に直交する単位ベクトルである．$\gamma''(s) = \boldsymbol{e}'(s) = 0$ となるような点では主法線ベクトルを定義することができないので，以下 $\gamma''(s)$ は常に 0 でないとしてお

く．このとき $\kappa(s) = |\boldsymbol{e}'(s)|$ とおけば

$$\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s)\,, \qquad \kappa(s) = |\gamma''(s)| > 0$$

が成り立つ．この $\kappa(s)$ を空間曲線 $\gamma(s)$ の**曲率**とよぶ．

ここで，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}$ は互いに直交する単位ベクトルであるから，ベクトル積（付録 A (171 ページ) 参照）を用いて

$$\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

とおけば，ベクトル積の性質から $\boldsymbol{b}(s)$ は $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ に直交する単位ベクトルである．これを**従法線ベクトル**とよぶ．各 s に対して

$$\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$$

は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を与えている．

さらに

(5.1) $\qquad \tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$

を曲線の s における**捩率**（れいりつ）とよぶ[1]．これは空間曲線の平面曲線からの離れ具合いを表す（図 5.1，節末問題の **5** 参照）．

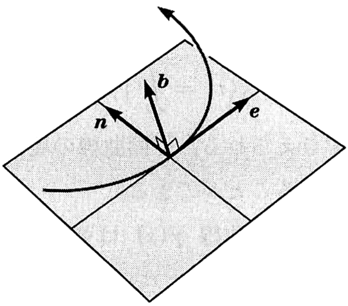


図 5.1　主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$

2 つの曲線が，向きを保つ合同変換（付録 A (169 ページ) 参照）で写り合うならば，それらの曲率と捩率は一致する（節末問題の **1** 参照）．

例 5.1　助変数表示

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

で与えられる曲線を**つるまき線**という（図 5.2）．ただし a, b は同時には 0 にならない定数である．$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$ となるので，この曲線の弧長 s は

$$s = t\sqrt{a^2+b^2}$$

で与えられる．これを用いて $\gamma(t)$ を弧長パラ

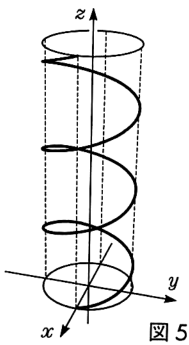


図 5.2　つるまき線

1）ギリシア文字 τ は「タウ」と読む．

メータで表すと，

$$\gamma(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},a\sin\frac{s}{c},\frac{bs}{c}\right)\qquad (c:=\sqrt{a^2+b^2})$$

となる．このとき

$$\boldsymbol{e}(s)=\gamma'(s)=\frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c},a\cos\frac{s}{c},b\right),$$

$$\boldsymbol{e}'(s)=\gamma''(s)=\frac{1}{c^2}\left(-a\cos\frac{s}{c},-a\sin\frac{s}{c},0\right)$$

であるから曲率 κ，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ はそれぞれ，

$$\kappa=|\gamma''(s)|=\frac{|a|}{c^2}=\frac{|a|}{a^2+b^2},\qquad \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{e}'(s)}{|\boldsymbol{e}'(s)|}=\frac{a}{|a|}\left(-\cos\frac{s}{c},-\sin\frac{s}{c},0\right)$$

となる．これから従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ と捩率 τ は

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}=\frac{a}{|a|}\frac{1}{c}\left(b\sin\frac{s}{c},-b\cos\frac{s}{c},a\right),$$

$$\tau=-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}=\frac{b}{c^2}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

と求められる．したがって，つるまき線の曲率と捩率はともに定数である． ◇

上の例では弧長をパラメータとして，つるまき線の曲率と捩率を計算したが，いろいろな具体例に対して曲率や捩率を計算するには，一般の助変数 t について，これらを表す式を作っておくと便利である．（弧長とは限らない）助変数 t で表示された曲線 $\gamma(t)$ に対して，その単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$，従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(t)$ は

$$\text{(5.2)}\qquad \boldsymbol{e}=\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|},\qquad \boldsymbol{n}=\frac{(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\times\dot\gamma}{|(\dot\gamma\times\ddot\gamma)\times\dot\gamma|},\qquad \boldsymbol{b}=\frac{\dot\gamma\times\ddot\gamma}{|\dot\gamma\times\ddot\gamma|}$$

で与えられる．さらに曲率と捩率は，

$$\text{(5.3)}\qquad \kappa(t)=\frac{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|}{|\dot\gamma(t)|^3},\qquad \tau(t)=\frac{\det(\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t),\dddot\gamma(t))}{|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)|^2}$$

となる（節末問題の **2** 参照）．とくに，弧長パラメータ s で表されている場合，(5.3) は次のように表される：

$$\kappa(s)=|\gamma'(s)\times\gamma''(s)|,\qquad \tau(s)=\frac{\det(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s))}{\kappa(s)^2}.$$

フルネ・セレの公式 弧長によってパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(s)$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$，従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をなすから，$\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトルは $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ の一次結合で表すことができる．したがって，$\boldsymbol{n}', \boldsymbol{b}'$ は

$$\boldsymbol{n}' = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \alpha_1 \boldsymbol{e} + \alpha_2 \boldsymbol{n} + \alpha_3 \boldsymbol{b}, \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{b}' = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \beta_1 \boldsymbol{e} + \beta_2 \boldsymbol{n} + \beta_3 \boldsymbol{b} \tag{5.5}$$

という形に書き表すことができる．ここで，α_j, β_j ($j = 1, 2, 3$) は s の実数値関数である．

式 (5.4) の両辺に $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ内積すると

$$\alpha_1 = \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e})' - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}' = -\kappa \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = -\kappa,$$

$$\alpha_2 = \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})' = 0,$$

$$\alpha_3 = \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b})' - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b}' = \tau.$$

また，式 (5.5) の両辺に $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ内積すると

$$\beta_1 = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e})' - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}' = -\kappa \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$

$$\beta_2 = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n} = -\tau,$$

$$\beta_3 = \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})' = 0.$$

これらを (5.4), (5.5) に代入して整理したものと $\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}$ をまとめて

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'(s) = & & \kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s) & \\ \boldsymbol{n}'(s) = & -\kappa(s)\,\boldsymbol{e}(s) & & +\tau(s)\,\boldsymbol{b}(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) = & & -\tau(s)\,\boldsymbol{n}(s) & \end{cases} \tag{5.6}$$

が成り立つことがわかる．これを空間曲線に関する**フルネ・セレの公式**[2)] とよぶ．

3 つのベクトル $\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)$ をそれぞれ列ベクトルとみなして横に並べてできる 3 次正方行列を

2） Serret, Joseph Alfred (1819 - 1885)．フレネは 19 ページ参照．

$$\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$$

とおく[3]．各 s に対して $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は正の正規直交系(右手系)をなすことから，$\mathcal{F}(s)$ は行列式の値が1であるような直交行列であることがわかる．この表示を用いると，フルネ・セレの公式 (5.6) は

$$(5.7) \qquad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えることができる．

曲線論の基本定理　§2で見たように曲率が与えられれば対応する平面曲線は一意に決定できた．空間曲線についても同様のことがいえる．

定理 5.2（**曲線論の基本定理**）　区間 (a, b) 上で定義された2つの微分可能な関数 $\kappa(s), \tau(s)$ が与えられ，さらに (a, b) 上で $\kappa(s) > 0$ が成り立っているとする．このとき弧長によってパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ $(a < s < b)$ で曲率が $\kappa(s)$，捩率が $\tau(s)$ となるものが存在する．さらに，そのような曲線は向きを保つ合同変換を除いてただ一つである．

［**証明**］　後半(一意性)は，平面曲線の場合の定理2.7と同様に証明できる．前半(存在)を示そう．$s_0 \in (a, b)$ を1つ固定して，3次正方行列に値をもつ $\mathcal{F}(s)$ を未知関数にもつ微分方程式の初期値問題

$$(5.8) \qquad \mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}(s_0) = I, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．ただし I は3次の単位行列である．これは $\mathcal{F}$ の各成分(9個ある)に関して線形な方程式であるから，線形常微分方程式の基本定理(付録Aの定理2.2)より，区間 (a, b) で定義された (5.8) の解 $\mathcal{F}(s)$ がただ一つ存在する．ここで Ω は交代行列だから

3）　$\mathcal{F}$ はフレーム(frame)の頭文字である．

$$(\mathcal{F}\,{}^t\mathcal{F})' = \mathcal{F}\,{}^t\mathcal{F}' + \mathcal{F}'\,{}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}\,({}^t\Omega + \Omega)\,{}^t\mathcal{F} = O$$

が成り立つ．したがって $\mathcal{F}(s)$ は s によらない定数行列であるから

$$\mathcal{F}(s)\,{}^t\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s_0)\,{}^t\mathcal{F}(s_0) = I$$

となり，$\mathcal{F}(s)$ は直交行列であることがわかる．そこで $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ と書き，

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$$

とすれば $\gamma(s)$ が求める曲線である．最後の部分は演習問題とする． □

空間の単純閉曲線は**結び目**とよばれる．平面の単純閉曲線は，それを連続的に変形すれば円と重ね合わせることができるが，図5.3のような結び目は連続的に変形して円と重ね合わせられない．結び目の性質を調べることは空間曲線に関する重要な問題の一つである．結び目と全曲率(平面曲線の場合と同様に定義される．26ページ参照)との関係は [4],[12] に解説がある．

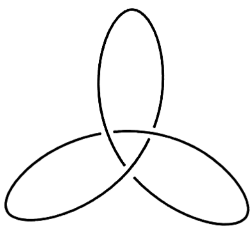


図5.3 結び目

練習問題5

1. 空間曲線の曲率と捩率は向きを保つ合同変換で不変である，すなわち，Φ を向きを保つ合同変換(付録A(169ページ)参照)とするとき，曲線 $\gamma(s)$ の曲率・捩率と，曲線 $\Phi\circ\gamma(s)$ の曲率・捩率は一致することを示せ．(なお，一般の合同変換でも曲率は不変であるが，捩率はその符号が変わる可能性がある．)

2. 一般の助変数で表示された曲線に対して，式(5.2),(5.3)を示せ．

3. 弧長によってパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ の曲率がいたるところ 0 でないとする．このとき，空間曲線 $\tilde{\gamma}(s) := (x(s), y(s), 0)$ の曲率は $\gamma(s)$ の曲率の絶対値に等しく，捩率は恒等的に 0 であることを示せ．

4. 弧長パラメータで表示された空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率を $\kappa(s)$，捩率を $\tau(s)$ とすると，$s = 0$ の近くで

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\,\boldsymbol{e}(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\,\boldsymbol{n}(0)$$
$$+ \frac{s^3}{6}\{-(\kappa(0))^2\boldsymbol{e}(0) + \kappa'(0)\,\boldsymbol{n}(0) + \kappa(0)\,\tau(0)\,\boldsymbol{b}(0)\} + o(s^3)$$

と表されることを示せ．ただし，$o(s^3)$ はランダウの記号（付録 A-1 参照）である．これを空間曲線に対する**ブーケ**[4]**の公式**という．練習問題 2 の **7** を参照せよ．

5*. 捩率が恒等的に 0 であるような空間曲線は問題 **3** のようにして平面曲線から得られる空間曲線に向きを保つ合同変換で重ね合わせることができることを示せ．

6*. 球面上の曲率が一定な曲線は円であることを示せ．

7*. 平面曲線 $\gamma_1(t)$ の曲率を $\kappa_1(t)$ とする．$\gamma_1(t)$ を平面上の ある直線に関して折り返して得られる曲線を $\gamma_2(t)$ とすると，γ_2 の曲率は $-\kappa_1(t)$ となる（練習問題 2 の **3** 参照）．γ_1, γ_2 から問題 **3** のようにして得られる空間曲線を $\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t)$ とすると，これらの曲率は一致して $|\kappa_1|$ に等しく，捩率は恒等的に 0 である．

さて，平面曲線として γ_1 と γ_2 は異なる曲率をもつから，回転と平行移動によって重ね合わせることができないが，空間曲線 $\tilde{\gamma}_1$ と $\tilde{\gamma}_2$ は，曲率と捩率が一致しているので，曲線論の基本定理 5.2 から，回転と平行移動（向きを保つ合同変換）で重ね合わせることができる．この違いが生ずる理由を明らかにせよ．

---

4) Bouquet, Jean Claude (1819 - 1885).

第II章
曲　　面

曲線と同様に曲面を助変数で表示し，その表示に応じて第一基本量と第二基本量を定義する．さらに，これらを用いて，助変数表示に依存しない量として，曲面の曲がり具合を表すガウス曲率と平均曲率を定義し，それらの幾何学的意味を説明する．応用として，曲面上の「まっすぐな線（測地線）」で曲面上の3点を結んでできる三角形の内角の和が，2直角と，どれほど異なるかを測るガウス・ボンネの定理を紹介する．

§ 6. 曲面とは何か

殻を割っていない卵の表面や自動車のボディなど，実生活において我々はさまざまな曲面を目にしている．このような曲面を数式で表現する方法を紹介しよう．

2 変数関数のグラフ　平面 $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D で定義された関数（2 変数関数）$f(x,y)$ に対して，(x,y) が D を動くときの点 $(x,y,f(x,y))$ の軌跡は曲面を与える．これを $z=f(x,y)$ の**グラフ**という．

例 6.1　（1）　1 次関数 $f(x,y)=ax+by+c$ のグラフは平面を与える．

（2）　関数

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \qquad (a, b \text{ は正の定数}) \tag{6.1}$$

のグラフを**楕円放物面**という（図 6.1）．楕円放物面を z 軸に平行な平面で切った切り口は放物線，z 軸に垂直な平面（$z>0$）で切った切り口は楕円となる．とくに $a=b$ のときは**回転放物面**，すなわち xz 平面上の放物線 $z=x^2/a^2$ を z 軸のまわりに回転させてできる回転面である．回転放物面が鏡のようになっていたとすると，z 軸に平行で z 軸の正の遠方から曲面に向かってくる光線は曲面上で反射して，焦点 $(0,0,a^2/4)$ に集まる．パラボラ・アンテナはこの事実を利用している．

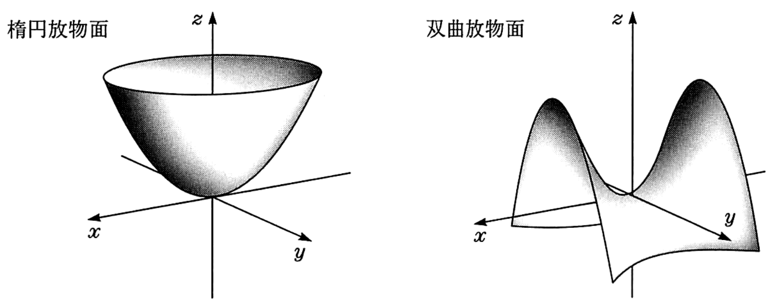


図 6.1

（3） 関数

(6.2) $$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad (a, b \text{ は正の定数})$$

のグラフを**双曲放物面**という(図6.1)．この曲面を z 軸に平行な平面で切った切り口は放物線(ただし，平面 $bx \pm ay + c = 0$（c は定数）の場合は直線になる)，z 軸に垂直な平面で切った切り口は双曲線となる(ただし xy 平面による切り口は交わる2本の直線である)． ◇

方程式 $F(x, y, z) = 0$ で表される曲面　第I章で述べた曲線の陰関数表示を考えたときのように，3変数関数 $F(x, y, z)$ に対して，$F(x, y, z) = 0$ をみたす空間の点 (x, y, z) の集まりが曲面を表すことがある．たとえば $ax + by + cz + d = 0$ は平面を表す．

例6.2　（1） 方程式

(6.3) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c \text{ は正の定数})$$

で表される曲面を**楕円面**という(次のページの図6.2)．とくに $a = b$ ならば，xz 平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ を z 軸のまわりに回転させてできる**回転楕円面**となる．さらに $a = b = c$ ならば，半径 a の球面となる．

（2） 方程式

(6.4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a, b, c \text{ は正の定数})$$

で表される曲面を**一葉双曲面**という(図6.2)．この曲面を z 軸に平行な平面で切った切り口は双曲線，z 軸に垂直な平面で切った切り口は楕円である．

また，

(6.5) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (a, b, c \text{ は正の定数})$$

は**二葉双曲面**を表す(図6.2)．一葉双曲面と同様に，この曲面の z 軸に平行な平面による切り口は双曲線，z 軸に垂直な平面($|z| > c$)による切り口は楕円である．

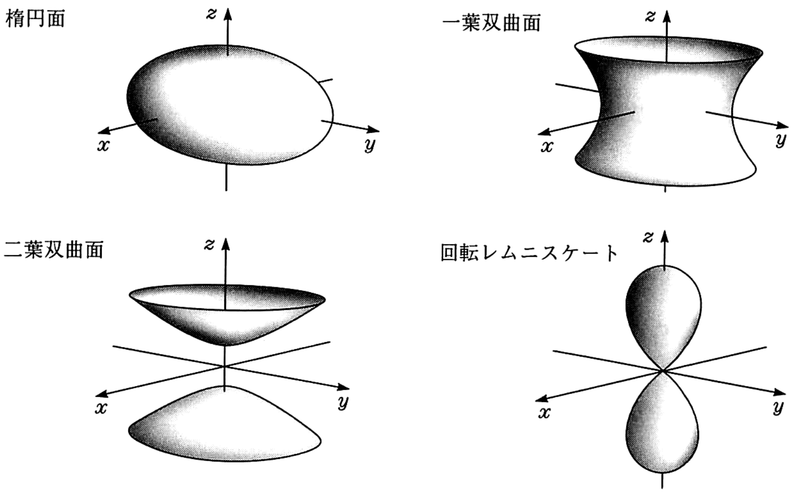


図 6.2　いろいろな曲面

（3）　方程式

(6.6)　　$$(x^2+y^2+z^2)^2-a^2(z^2-x^2-y^2)=0$$　　（a は正の定数）

は図 6.2 のような，レムニスケート（§1 参照）を回転させた形をしており，原点ではなめらかな曲面とはならず，くびれた形をしている．◇

方程式 $F(x,y,z)=0$ の形で曲面が表されているとき，

$$F_x(x_0,y_0,z_0)=F_y(x_0,y_0,z_0)=F_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$\left(F_x=\frac{\partial F}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y},\ F_z=\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

となる曲面上の点 (x_0,y_0,z_0) は曲面の**特異点**とよばれる．特異点では曲面がなめらかではない可能性がある．実際，(6.6) の回転レムニスケートでは原点が特異点である．一般に特異点の近くでの曲面の形はさまざまである．

一方，特異点以外の点では曲面は交叉のないなめらかな形をしている．たとえば $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ ならば，(x_0,y_0,z_0) の近くで曲面は $z=f(x,y)$ のなめらかなグラフで表すことができる（陰関数定理(付録 A の定理 1.6)参照）．

助変数表示された曲面　曲線は１つの助変数で表すことができたが，曲面ではどうであろうか．３つの２変数関数の組 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ は，各 (u,v) に対して空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x,y,z) を与える．変数 (u,v) が uv 平面上の領域 D を動くとき，この点の軌跡は曲面を描くだろう．例 6.2 にあげた曲面の例は次のように表示することができる．

楕円面：

$$x = a\cos u\cos v, \quad y = b\cos u\sin v, \quad z = c\sin u\ ;$$
$$D = \left\{ (u,v) \;\middle|\; |u| < \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq v < 2\pi \right\}.$$

一葉双曲面：

$$x = a\cosh u\cos v, \quad y = b\cosh u\sin v, \quad z = c\sinh u\ ;$$
$$D = \{ (u,v) \mid u \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqq v < 2\pi \}.$$

二葉双曲面：

$$x = a\sinh u\cos v, \quad y = b\sinh u\sin v, \quad z = c\cosh u\ ;$$
$$D = \{ (u,v) \mid u \in \boldsymbol{R},\ 0 \leqq v < 2\pi \}.$$

回転レムニスケート：

$$x = \frac{a\sin u\cos u\cos v}{1+\sin^2 u}, \quad y = \frac{a\sin u\cos u\sin v}{1+\sin^2 u},$$
$$z = \frac{a\cos u}{1+\sin^2 u}\ ;$$
$$D = \{ (u,v) \mid 0 \leqq u < \pi,\ 0 \leqq v < 2\pi \}.$$

ここでは２変数関数を３つひとまとめにして，曲面を位置ベクトルの形

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

で表すことにする．このとき

$$p_u = \frac{\partial p}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u), \qquad p_v = \frac{\partial p}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

が一次独立でないような点（ベクトル p_u と p_v が平行もしくは少なくとも一方が０となる点）の近くでは $p(u,v)$ がなめらかな曲面を表さない場合がある．たとえば回転レムニスケートにおいて $u=\pi/2$ となる点では $p_v = 0$

である．これらの点は図 6.2 のくびれた点に対応する．

そこで，以下では (u, v) が uv 平面の領域 D を動くとき

(6.7)　　各 $(u, v) \in D$ で $p_u(u, v)$ と $p_v(u, v)$ は一次独立

であるような $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を**曲面の助変数表示**とよび，D をこの**助変数表示が定める領域**とよぶことにする．また変数 (u, v) を**助変数**または**パラメータ**とよぶ．

2 変数関数 $f(x, y)$ に対して

$$p(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

とおくと，$p(x, y)$ は関数 $z = f(x, y)$ のグラフを表す．このとき $p_x = (1, 0, f_x)$ と $p_y = (0, 1, f_y)$ は一次独立であるから，これは助変数表示の特別な場合とみなすことができる．

曲面の助変数表示 $p(u, v)$ において，v を 1 つ固定したときの対応 $u \mapsto p(u, v)$ によって決まる曲面上の曲線を **u 曲線**といい，u を 1 つ固定したときの対応 $v \mapsto p(u, v)$ によって決まる曲線を **v 曲線**という．これら 2 つの曲線の族は曲面を図のように網のようにおおう(図 6.3)．ベクトル $p_u(u, v)$ は，u 曲線の各点での速度ベクトルを表し，$p_v(u, v)$ は，v 曲線の各点での速度ベクトルを表している．

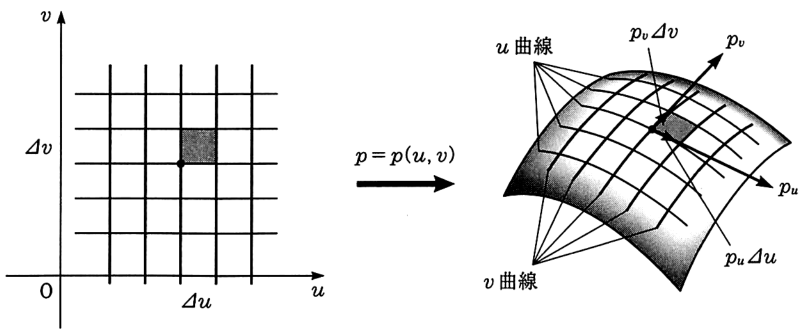


図 6.3　u 曲線と v 曲線；曲面上の微小平行四辺形

また，点 $p(u,v)$ で曲面に接するベクトルは，$p_u(u,v)$ と $p_v(u,v)$ の一次結合で表すことができる．したがって，点 $p(u,v)$ を通りこれらの接ベクトル $p_u(u,v), p_v(u,v)$ に平行な平面

$$\{\, p(u,v) + s\,p_u(u,v) + t\,p_v(u,v) \mid s, t \in \boldsymbol{R} \,\}$$

が曲面の接平面となり，p_u, p_v の両方に直交し，次の式で定義される向きの単位ベクトル

$$\nu := \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \tag{6.8}$$

が曲面の**単位法線ベクトル**となる．ここで“ × ”はベクトル積を表す(付録 A の 171 ページ参照)．これを $\nu = (a, b, c)$ と成分表示すると，曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) における曲面の接平面の方程式

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

を得る．

一般に与えられた曲面全体を 1 組の助変数表示で表せない場合がある．たとえば 55 ページの楕円面の表示では，$u = \pm\pi/2$ となる点では $p_v = 0$ となり，条件 (6.7) をみたさない．すなわち，この表示では点 $(0, 0, \pm c)$ は除かれている．しかし，この楕円面を

$$z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \tag{6.9}$$

という関数のグラフで表せば，57 ページの表示で除かれた点 $(0, 0, \pm c)$ のまわりの曲面の x, y を助変数と考えたときの助変数表示が得られる．

一般に曲面のすべての部分を助変数で表すためには，複数の助変数表示が必要な場合が多い．このとき，曲面の 1 つずつの表示 $p(u,v)$ の助変数の対(つい) (u,v) を曲面の**局所座標**とよび，助変数を取り換える操作を曲面の**座標変換**とよぶことがある(節末問題の **4** と練習問題 8 の **8** 参照)．式 (6.8) で与えられる単位法線ベクトルは，曲面の接平面に直交する方向を与えているから，座標変換によって符号を除いて不変である(節末問題の **4** 参照)．

本章では，とくに断りのない限り，自己交叉するような曲面は考えない．

曲面の面積 曲面 $p(u,v)$ が与えられているとし，D をこの助変数表示が定める領域とする．このとき，領域 D がおおう曲面の部分の面積を以下のように求めることができる．まず，uv 平面において u 方向，v 方向それぞれへの微小変化 $\varDelta u, \varDelta v$ を考えるとき，uv 平面の微小長方形領域 $[u, u+\varDelta u]\times[v, v+\varDelta v]$ に対応する曲面上の像の面積を近似的に求めよう（図6.3）．テイラーの定理（付録Aの定理1.2）より近似式

$$p(u+\varDelta u, v)-p(u,v)\approx p_u(u,v)\varDelta u\,,$$
$$p(u, v+\varDelta v)-p(u,v)\approx p_v(u,v)\varDelta v\,,$$
$$p(u+\varDelta u, v+\varDelta v)-p(u,v)\approx p_u(u,v)\varDelta u+p_v(u,v)\varDelta v$$

が成り立つから[1]領域 $[u, u+\varDelta u]\times[v, v+\varDelta v]$ に対応する曲面上の領域は

$$p(u,v)\,,\qquad p(u,v)+p_u(u,v)\varDelta u,$$
$$p(u,v)+p_v(u,v)\varDelta v\,,\qquad p(u,v)+p_u(u,v)\varDelta u+p_v(u,v)\varDelta v$$

を頂点とする平行四辺形で近似される．この平行四辺形の面積は

$$|(p_u(u,v)\varDelta u)\times(p_v(u,v)\varDelta v)|=|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\varDelta u\varDelta v$$

であるから，曲面の面積は D 上でこの微小面積要素をすべて足し合わせて

$$\iint_D |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,du\,dv \tag{6.10}$$

という式で与えられる[2]．式(6.10)の積分の「中身」

$$dA := |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,du\,dv \tag{6.11}$$

を曲面の**面積要素**という．これが曲面の助変数表示の取り方によらないことは，重積分の変数変換の公式（付録Aの定理1.7）から容易に確かめられる（節末問題の**6**参照）．とくにグラフ $z=f(x,y)$ （$(x,y)\in D$） で表される曲面の面積は次で与えられる（節末問題の**3**）：

$$\iint_D \sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dx\,dy\,. \tag{6.12}$$

（証明は節末問題とする.）

1） 記号 ≈ は右辺と左辺が近似的に等しいことを意味する．

2） この公式の厳密な証明はここではしない．たとえば[23]（第II巻，VII章§5）を参照せよ．

《**補注**》 本書では自己交叉をもたない曲面を扱うが，曲線論で自己交叉をもつ曲線を扱ったように，定義の条件を緩めることによって，以下のような興味深い曲面も研究対象にすることができる．たとえば，図 6.4 の上のような曲面はクライン[3)]の壺とよばれ，表裏の区別のない閉曲面の例である．また，普通のシャボン玉は球形をしているが，数学的には，図 6.4 の下のような形の「シャボン玉の方程式の解」[4)]（ウェンテトーラスとよばれる）が知られている．この曲面は，1986 年にウェンテ[5)]によって発表された．このような自己交叉をもつ曲面を，本書では「一般化された曲面」ということにする． ◇

クラインの壺

ウェンテトーラス

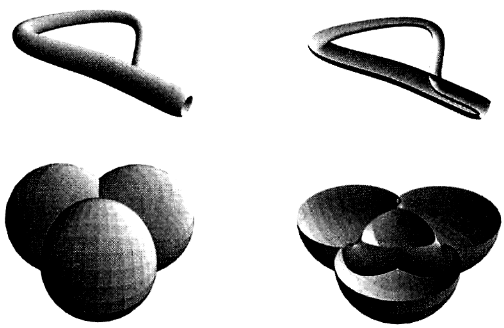
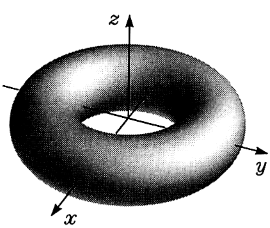


図 6.4 自己交叉をもつ曲面

練 習 問 題 6

1. 点 $(a, 0, 0)$ を中心とする半径 b の xz 平面上の円を z 軸のまわりに回転させると，右図のような輪環面（トーラス）が得られる．ただし $0 < b < a$ とする．この曲面の助変数表示を与えよ．

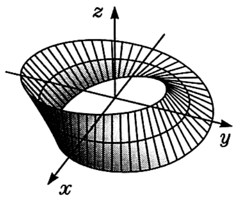


3） Klein, Felix C. (1849 - 1925).

4） §8 で定義する「平均曲率」が一定な曲面のことである．

5） Wente, Henry C.

2. xy 平面に原点を中心とする半径 2 の円を描く．この円を帯の中心線とする幅が 2 のメビウスの帯（下図）の助変数表示を与えよ．



3. 式 (6.10) から (6.12) を導け．またこれを用いて半径 R の球面の面積は $4\pi R^2$ であることを示せ．

4. $\xi\eta$ 平面の領域 $\tilde{D}$ から uv 平面の領域 D への微分同相写像（座標変換）φ：$(\xi, \eta) \mapsto \varphi(u, v) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ を考える．D 上で定義された曲面の助変数表示 $p(u, v)$ に対して $\tilde{p}(\xi, \eta) = p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ は p と同じ曲面のもう一つの助変数表示を与える．このように $\tilde{p}(\xi, \eta)$ が $p(u, v)$ から座標変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ で得られるとき，本書では誤解の恐れがない限り $\tilde{p}(\xi, \eta)$ の代りに $p(\xi, \eta)$ と書く．以上の状況で

$$\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \pm \frac{p_\xi \times p_\eta}{|p_\xi \times p_\eta|}$$

（正負の符号はヤコビ行列式の符号と一致する）が成り立つことを示せ．

5. 曲面の面積は助変数表示の取り方によらない．すなわち，問題 **4** のような座標変換を考えるとき，各々の表示で (6.10) によって求めた面積が一致することを，重積分の変数変換の公式を用いて示せ．

6. 曲面の面積は合同変換によって変わらない．すなわち，助変数表示 $p(u, v)$ で与えられる曲面の面積と，$Tp(u, v) + \boldsymbol{q}$（$T$ は直交行列，$\boldsymbol{q}$ は定ベクトル）で与えられる曲面の面積は一致することを示せ．

§7. 第一基本形式

この節では，曲面の微小部分での長さや角度の情報をもつ第一基本形式を紹介する．その準備として関数の外微分の概念を述べよう．

関数の外微分 2変数関数 $f(u,v)$ を考える．点 (u,v) が $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ にわずかに動いたときの f の値の微小変化

$$\Delta f = f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v)$$

を考えると，テイラーの定理(付録Aの定理1.2)から $\Delta u, \Delta v$ が十分に小さいときは

$$\Delta f \approx f_u(u,v)\Delta u + f_v(u,v)\Delta v$$

が成り立つ．この近似式にならって記号的に

$$df(u,v) = f_u(u,v)\,du + f_v(u,v)\,dv$$

とおき，df を f の**外微分**あるいは**全微分**とよぶ．ここで du, dv は単なる記号と考えておくことにする．

このように外微分を定義すると，df は座標変換(§2 (17ページ)参照)によって不変であることが，以下のようにしてわかる．座標変換

$$u = u(\xi,\eta), \qquad v = v(\xi,\eta)$$

を考えると，u, v は ξ, η の関数であるから，外微分の定義によって

$$du(\xi,\eta) = u_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + u_\eta(\xi,\eta)\,d\eta,$$
$$dv(\xi,\eta) = v_\xi(\xi,\eta)\,d\xi + v_\eta(\xi,\eta)\,d\eta$$

となる．これを df の定義式に代入すると，偏微分の変数変換の公式より

$$\begin{aligned} df &= f_u du + f_v dv \\ &= f_u(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta) + f_v(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta) \\ &= (f_u u_\xi + f_v v_\xi)\,d\xi + (f_u u_\eta + f_v v_\eta)\,d\eta \\ &= f_\xi d\xi + f_\eta d\eta \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $\xi\eta$ 平面上の f の外微分 $f_\xi d\xi + f_\eta d\eta$ が元の df と

一致することが確かめられた。

外微分について1変数関数の微分の公式に類似な以下の公式が成り立つ(節末問題の**2**参照)：

$$d(f+g) = df + dg, \tag{7.1}$$

$$d(fg) = g\,df + f\,dg, \tag{7.2}$$

$$d(\varphi(f)) = \dot{\varphi}(f)\,df. \tag{7.3}$$

ただし $\varphi = \varphi(t)$ は1変数 t の微分可能な関数で，$\dot{\varphi}(t)$ はその導関数である．具体的計算では，これらの公式を組み合せて使えばよい．

いま，例で具体的に外微分の座標変換による不変性を確かめてみよう．(u, v) の関数

$$f(u, v) = \sqrt{u^2+v^2} \tag{7.4}$$

の外微分は，

$$\begin{aligned} df(u, v) &= \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,d(u^2+v^2) \\ &= \frac{u\,du + v\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

で与えられる．一方，

$$u = r\cos\theta, \qquad v = r\sin\theta \tag{7.6}$$

とおき，極座標 (r, θ) で関数 (7.4) を表すと $f(r, \theta) = r$ となるから，$df(r, \theta) = dr$ を得る．ここで (7.6) より

$$r = \sqrt{u^2+v^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right). \tag{7.7}$$

この式の外微分をとれば

$$dr = \frac{u\,du + v\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad d\theta = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2+v^2}$$

となる．$df(r, \theta) = dr$ に上の式を代入して (7.5) が得られるから，この場合の df の座標不変性が直接確かめられた．

第一基本形式　曲面 $p(u,v)$ 上の 2 点 $p(u,v)$ と点 $p(u+\Delta u, v+\Delta v)$ の距離 Δs の 2 乗は，$\Delta u, \Delta v$ が十分小さいときはテイラーの定理（付録 A の定理 1.2）より，次のように近似される：

$$
\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= |p(u+\Delta u, v+\Delta v) - p(u,v)|^2 \\
&\approx |p_u(u,v)\Delta u + p_v(u,v)\Delta v|^2 \\
&= (p_u(u,v)\cdot p_u(u,v))(\Delta u)^2 \\
&\qquad + 2(p_u(u,v)\cdot p_v(u,v))\Delta u \Delta v \\
&\qquad\qquad + (p_v(u,v)\cdot p_v(u,v))(\Delta v)^2 .
\end{aligned}
$$

外微分のときと同様に，上の近似式を形式的に表現する方法として以下のように第一基本形式を定義する．まず，接ベクトル $p_u(u,v)$ と $p_v(u,v)$ の内積で与えられる 3 つの (u,v) の関数

$$E = p_u\cdot p_u , \quad F = p_u\cdot p_v , \quad G = p_v\cdot p_v$$

を**第一基本量**とよび，形式的な和

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

を**第一基本形式**とよぶ．この表現で du, dv を $\Delta u, \Delta v$ に置き換えれば元の近似式が得られる．形式的だが，第一基本形式を

$$ds^2 = (\,du \quad dv\,)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

と行列の積の形に表すことができる．ここで行列

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

は固有値が正の対称行列となる（節末問題の **1** 参照）．とくに $\hat{I}$ は正則行列である．本書ではこの行列を**第一基本行列**とよぶ．

第一基本形式の座標不変性　曲面の助変数表示 $p(u,v)$ をベクトル値関数

$$p(u,v) = (\,x(u,v), y(u,v), z(u,v)\,)$$

と思って（右辺は左辺の成分表示），その外微分を

$$dp := p_u du + p_v dv = (dx, dy, dz)$$

と定義する．これより第一基本形式の別の表示

$$ds^2 = dp \cdot dp \tag{7.8}$$

が得られる．ここで"・"は $\boldsymbol{R}^3$ の内積である．63ページで述べたように外微分 $dp = (dx, dy, dz)$ は座標変換で変わらないから，その内積である第一基本形式 ds^2 も座標変換で変わらない．この性質を利用して，座標変換をしたときの第一基本量の変換公式を求めることができる．実際，助変数表示 $p = p(u, v)$ に座標変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ をほどこして得られる助変数表示 $p = p(\xi, \eta)$ に関する第一基本量を求めてみよう．u, v の外微分

$$du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta, \qquad dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta$$

を ds^2 の定義式に代入して

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta)^2 + 2F(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta)(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta) \\ &\qquad + G(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta)^2 \\ &= (E u_\xi^2 + 2F u_\xi v_\xi + G v_\xi^2) d\xi^2 \\ &\qquad + 2(E u_\xi u_\eta + F(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + G v_\xi v_\eta) d\xi d\eta \\ &\qquad + (E u_\eta^2 + 2F u_\eta v_\eta + G v_\eta^2) d\eta^2 \end{aligned}$$

となるから $p(\xi, \eta)$ の第一基本量を $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ とすれば

$$\begin{cases} \widetilde{E} = p_\xi \cdot p_\xi = E u_\xi^2 + 2F u_\xi v_\xi + G v_\xi^2, \\ \widetilde{F} = p_\xi \cdot p_\eta = E u_\xi u_\eta + F(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + G v_\xi v_\eta, \\ \widetilde{G} = p_\eta \cdot p_\eta = E u_\eta^2 + 2F u_\eta v_\eta + G v_\eta^2 \end{cases} \tag{7.9}$$

と表すことができる．この関係式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

と表せる．ここで $\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ は正則な行列で，座標変換のヤコビ行列とよばれる（付録Aの定理1.5参照）．関係式(7.10)は，次節でガウス曲率と

平均曲率の座標変換による不変性を示す際に使われる.

例 7.1 関数

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad ((x, y) \neq (0, 0))$$

のグラフで表される曲面を考えよう. これは, xz 平面の半直線 $z = x$ $(x > 0)$ を z 軸のまわりに回転させたもの, すなわち原点を頂点とする錐面となる(図 7.1). 極座標 (r, θ) を用いて

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と表すと

$$p(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r) \qquad (r > 0)$$

によって平方根を使わない錐面の助変数表示が得られる. このとき

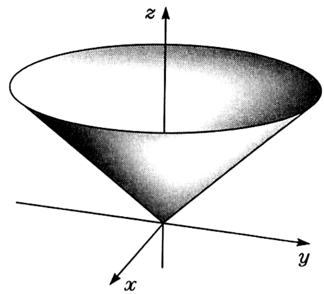


図 7.1 錐面

$$dp = (\cos\theta, \sin\theta, 1)\,dr + r(-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta$$

となるので

$$ds^2 = dp\cdot dp = 2dr^2 + r^2 d\theta^2$$

となる. とくに極座標 (r, θ) で曲面を表したときの第一基本量は $E = 2$, $F = 0$, $G = r^2$ で与えられる. また, xy 座標に関する第一基本量は

$$ds^2 = \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)dx^2 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,dxdy + \left(1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)dy^2$$

となる(各自確かめよ). ◇

面積と第一基本形式 曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が与えられたとき, ラグランジュの恒等式(付録 A (171 ページ)の (3.2))によって,

$$|p_u \times p_v|^2 = (p_u\cdot p_u)(p_v\cdot p_v) - (p_u\cdot p_v)^2 = EG - F^2$$

が成り立つから, 前の節(60 ページの式 (6.11))で定義した面積要素は,

(7.11) $$dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

と表すことができる. したがって, 第一基本量を求めることで曲面の面積が

計算できる．

例 7.2 輪環面(トーラス．練習問題6の**1**参照)

$$p(u,v)=((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u) \quad (0\leqq u,v<2\pi)$$

の面積を計算しよう．ただし $0<b<a$ とする．直接，外微分することによって

$$dp=b(-\sin u\cos v,\ -\sin u\sin v,\ \cos v)\,du + (a+b\cos u)(-\sin v,\cos v,0)\,dv$$

となるから，

$$ds^2=b^2du^2+(a+b\cos u)^2dv^2$$

となる．したがって，第一基本量は

$$E=b^2,\quad F=0,\quad G=(a+b\cos u)^2$$

で与えられる．とくに面積要素は

$$dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=b(a+b\cos u)\,du\,dv$$

となるから，この曲面の全面積は

$$\iint_{\{0\leq u,v<2\pi\}} b(a+b\cos u)\,du\,dv=(2\pi)^2ab$$

となる．これは半径 b，高さ $2\pi a$ の円柱の側面積に等しい． ◇

長さと角度

曲面の助変数表示 $p(u,v)$ によって曲面上の点を uv 平面上で表現することは，uv 平面上に曲面の地図を描くことと考えることができる．ここでは，曲面上で測る長さや角度を地図上で求める方法を紹介する．

助変数 (u,v) で表示された曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．このとき §6 で見たように，P において曲面に接するベクトルは $p_u(u_0,v_0)$ と $p_v(u_0,v_0)$ の一次結合で表される．したがって点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ で曲面に接するベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}=a_1p_u(u_0,v_0)+a_2p_v(u_0,v_0)\ \longleftrightarrow\ \tilde{\boldsymbol{a}}=(a_1,a_2)$$

という対応によって平面ベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}$ と同一視することができる．

同様に $\boldsymbol{b}=b_1p_u(u_0,v_0)+b_2p_v(u_0,v_0)$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}=(b_1,b_2)$ を同一視すれば $\boldsymbol{a}$ と

$\boldsymbol{b}$ の空間ベクトルとしての内積は

$$(7.12)\qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1 b_1 E + (a_1 b_2 + a_2 b_1) F + a_2 b_2 G = (\ a_1 \quad a_2\ )\ \hat{I} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

のように第一基本量と対応する平面ベクトルを用いて表すことができる．ただし $E = E(u_0, v_0)$，$F = F(u_0, v_0)$，$G = G(u_0, v_0)$ である．とくに，ベクトルの大きさは

$$(7.13)\qquad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{E a_1{}^2 + 2F a_1 a_2 + G a_2{}^2}$$

となる．

一般に uv 平面上に描かれた曲線 $\gamma(t) = (\ u(t), v(t)\ )\ (\ a \leqq t \leqq b\ )$ に対して $p\circ\gamma(t) = p(\ u(t), v(t)\ )$ は曲面 $p(u, v)$ 上に描かれた空間曲線を与えるが，その速度ベクトルは

$$\frac{d}{dt}\, p(\ u(t), v(t)\ ) = p_u\, \dot{u} + p_v\, \dot{v}$$

となるので，(7.13) より $p\circ\gamma$ の空間曲線としての長さ（弧長）は

$$(7.14)\qquad \mathcal{L}(p\circ\gamma) := \int_a^b \left| \frac{d}{dt}\, p(\ u(t), v(t)\ ) \right| dt = \int_a^b \sqrt{E\, \dot{u}^2 + 2F\, \dot{u}\dot{v} + G\, \dot{v}^2}\; dt$$

となり，やはり第一基本量を用いて表すことができる．さらに $t = t_0$ で交わる 2 つの uv 平面上の曲線 $\gamma_1(t) = (\ u_1(t), v_1(t)\ )$ と $\gamma_2(t) = (\ u_2(t), v_2(t)\ )$ に対応する同じ曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $p(\ u_1(t), v_1(t)\ )$ と $p(\ u_2(t), v_2(t)\ )$ の $t = t_0$ での速度ベクトルはそれぞれ

$$p_u\, \dot{u}_1 + p_v\, \dot{v}_1, \qquad p_u\, \dot{u}_2 + p_v\, \dot{v}_2$$

と表されるから，これらのなす角 θ は (7.12), (7.13) より

$$(7.15)\qquad \cos\theta = \frac{E\, \dot{u}_1 \dot{u}_2 + F(\dot{u}_1 \dot{v}_2 + \dot{v}_1 \dot{u}_2) + G\, \dot{v}_1 \dot{v}_2}{\sqrt{E\, \dot{u}_1{}^2 + 2F\, \dot{u}_1 \dot{v}_1 + G\, \dot{v}_1{}^2}\sqrt{E\, \dot{u}_2{}^2 + 2F\, \dot{u}_2 \dot{v}_2 + G\, \dot{v}_2{}^2}}$$

と，第一基本量を用いて表すことができる．とくに $E = G$ かつ $F = 0$ ならば

$$\cos\theta = \frac{\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{v}_1 \dot{v}_2}{\sqrt{\dot{u}_1{}^2 + \dot{v}_1{}^2}\sqrt{\dot{u}_2{}^2 + \dot{v}_2{}^2}}$$

となり，uv 平面上で曲線 γ_1, γ_2 の速度ベクトルがなす角度と一致する．このように $E = G$ かつ $F = 0$ となる性質をもつ座標系を**等温座標系**という．すべての曲面について，局所的には等温座標系がとれることが知られている（§14 参照）．

曲面の座標系を地図と考えると，(7.14)，(7.15)，(7.11) により第一基本量は地図上の長さ，角度，面積に関する情報を与えている．ただし，uv 平面上で (7.14) によって求めた空間曲線としての曲面上の曲線の長さは，この平面上で式 (1.4) によって与えられる平面曲線としての長さと一致するとは限らない．このことに関して次が成り立つ．

命題 7.3 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ が uv 平面上の領域 D で定義されているとする．D 内の任意の曲線 $(u(t),v(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さが，対応する曲面上の曲線 $p(u(t),v(t))$ の長さと一致するための必要十分条件は $p(u,v)$ の第一基本量が

$$E = G = 1, \quad F = 0$$

となることである．

[証明] 式 (7.14) より十分性がわかる．必要性を証明しよう．

角度 α を 1 つ固定し，D 上の任意の点 (u_0,v_0) を通り u 軸方向と角度 α をなす直線 $(u_0+t\cos\alpha, v_0+t\sin\alpha)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ を考える．この直線の uv 平面での長さは c であるが，対応する曲面上の曲線 $p(u_0+t\cos\alpha, v_0+t\sin\alpha)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ の長さはこれと等しいから，(7.14) より

$$c = \int_0^c \sqrt{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha}\,dt$$

が成り立つ．この両辺を c で微分して $c \to 0$ とすれば (u_0,v_0) において

$$E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\sin\alpha + G\sin^2\alpha = 1$$

となる．上の式は任意の α について成り立つ式であるから，ここで $\alpha=0$ とすれば $E=1$ となり，$\alpha=\pi/2$ とすれば $G=1$ となり，さらに $F=0$ が得られる． □

上の命題 7.3 の条件をみたす地図のことを**正確な地図**とよぶ．われわれの住む地球の地図については，付録 B-3 を，また，どのような曲面に対して正確な地図をつくることができるかについて，付録 B-4，§14 を参照されたい．

練 習 問 題 7

1.　実数を成分とする 2 次の対称行列 $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ が $b_{11} > 0$，$b_{11}b_{22} - b_{12}{}^2 > 0$ をみたすことと，その固有値がすべて正であることは同値であることを示せ．このことを用いて曲面の第一基本行列 $\hat{I}$ の固有値が正であることを示せ．

2.　外微分の公式 (7.1), (7.2), (7.3) を示せ．

3.　第一基本形式の座標不変性を用いずに，第一基本量の座標変換式 (7.10) を直接導出せよ．

4.　グラフ $z = f(x, y)$ で表される曲面の第一基本量を求めよ．

5.　§6 であげた楕円放物面，双曲放物面，楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面の第一基本量を求めよ．

6.　xz 平面上の曲線 $(x(t), z(t))$ を z 軸のまわりに回転することによって得られる曲面（回転面）は

$$p(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)) \qquad (0 \leqq v < 2\pi)$$

と助変数表示される．この曲面の第一基本量を求めよ．とくに，曲線が弧長パラメータで表示されているときと，関数 $x = f(z)$ のグラフのときはそれぞれどうなるか．

§ 8. 第二基本形式

この節では曲面の第二基本形式を定義し，それを用いて曲面の曲がり具合を表すガウス曲率と平均曲率を定義する．

第二基本形式 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ が与えられたとき，

$$II = -dp\cdot d\nu = -(p_u du + p_v dv)\cdot(\nu_u du + \nu_v dv)$$

を**第二基本形式**という．ただし $\nu=\nu(u,v)$ は，式 (6.8) で定義された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルである．上の式を展開すれば，

$$II = (-p_u\cdot\nu_u)\,du^2 + (-p_u\cdot\nu_v - p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv + (-p_v\cdot\nu_v)\,dv^2$$

という表示を得る．ところで接ベクトル p_u, p_v と単位法線ベクトル ν は直交するから，$p_u\cdot\nu=0$，$p_v\cdot\nu=0$ である．この両辺をさらに u,v で偏微分すれば

$$\begin{cases} p_{uu}\cdot\nu = -p_u\cdot\nu_u, & p_{vv}\cdot\nu = -p_v\cdot\nu_v, \\ p_{uv}\cdot\nu = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u \end{cases}$$

となるので，第二基本形式は，

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \tag{8.1}$$

と表すことができる．ただし，L, M, N は

$$\begin{cases} L := -p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu, \\ M := -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu, \\ N := -p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu \end{cases} \tag{8.2}$$

で与えられる 2 変数関数である．この L, M, N を**第二基本量**とよぶ．

第一基本形式の場合と同様に，第二基本形式を，行列の積として

$$II = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

のように表すことができる．この対称行列

$$\hat{II}:=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

を**第二基本行列**とよぶことにする．

第二基本形式が座標変換でどのように変わるかを調べよう．座標変換によって単位法線ベクトル ν は正負の符号を除いて不変である（練習問題6の**4**）．とくに，座標変換のヤコビ行列式が正の値をとるならば，単位法線ベクトルはその変換によって不変になる．このような座標変換を**正の座標変換**，ヤコビ行列式が負になる座標変換を**負の座標変換**とよぶことにする．

正の座標変換によって単位法線ベクトル ν は不変であるから，第二基本形式は正の座標変換で不変であることがわかる．また，負の座標変換をほどこすと ν の符号が変わるから，第二基本形式も符号を変える．以下では主に正の座標変換のみを考えることにする．負の座標変換に対しては $(u,v)\mapsto(v,u)$ のように助変数の順序を入れ換えれば正の座標変換にできるから，このことにより一般性を失うことはない．

第二基本形式の座標不変性を利用して，座標変換のもとで第二基本量がどのように変化するかを簡単に調べることができる．実際 $p=p(u,v)$ に正の座標変換 $u=u(\xi,\eta)$，$v=v(\xi,\eta)$ をほどこし，ξ,η による表示 $p=p(\xi,\eta)$ を考えると，第一基本形式の場合と同様にして，$p(\xi,\eta)$ の第二基本量を $\tilde{L},\tilde{M},\tilde{N}$ とすれば

$$\begin{cases} \tilde{L}:=-p_\xi\cdot\nu_\xi=L{u_\xi}^2+2Mu_\xi v_\xi+N{v_\xi}^2, \\ \tilde{M}:=-p_\xi\cdot\nu_\eta=Lu_\xi u_\eta+M(u_\xi v_\eta+u_\eta v_\xi)+Nv_\xi v_\eta, \\ \tilde{N}:=-p_\eta\cdot\nu_\eta=L{u_\eta}^2+2Mu_\eta v_\eta+N{v_\eta}^2 \end{cases}$$

と求められる．この関係式を行列で表すと

$$(8.3)\qquad \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix}={}^t\!\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

となる．第一基本行列は正則行列だから，ここで，新しい行列

$$(8.4) \qquad A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} GL-FM & GM-FN \\ -FL+EM & -FM+EN \end{pmatrix}$$

を考えると，変換式 (7.10), (8.3) によって，行列 A の座標変換の公式

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

が得られる．このことから，行列 A の固有値 λ_1, λ_2 は正の座標変換で変わらない量であることがわかる．さらに，これらの固有値は実数になる（節末問題の **1** および命題 9.3 参照）．これら λ_1, λ_2 を曲面の**主曲率**とよぶ．2 つの主曲率の積と平均をそれぞれ

$$(8.5) \qquad \begin{cases} K := \lambda_1\lambda_2 = \det A = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}, \\[2ex] H := \dfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr} A = \dfrac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \end{cases}$$

とおいて，K を曲面の**ガウス曲率**，H を**平均曲率**とよぶ．ただし $\operatorname{tr} A$ は行列 A のトレースを表す．

命題 8.1 ガウス曲率 K および平均曲率 H は正の座標変換で不変である．負の座標変換では，ガウス曲率は不変で，平均曲率はその符号を変える．

［**証明**］ 正の座標変換で主曲率は不変であるから，主張の前半が成り立つ．負の座標変換 $u = u(\xi, \eta)$，$v = v(\xi, \eta)$ により第一基本形式は不変で，第二基本形式は符号を変えるから，(8.4) で定義された行列 A は

$$\widetilde{A} = -J^{-1}AJ \qquad \left(J = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \right)$$

と変換されるので後半の主張を得る． □

命題 8.1 より，ガウス曲率・平均曲率の値は正の座標変換によらないので，計算するときは，できるだけ便利な助変数を選ぶとよい．

命題 8.2　ガウス曲率 K および平均曲率 H は向きを保つ合同変換（回転と平行移動との合成．付録 A-3 参照）で不変である．さらに，ガウス曲率は一般の合同変換でも不変になる．

［**証明**］　曲面の助変数表示 p に対して合同変換をほどこしたものを $\tilde{p} := Tp + \boldsymbol{c}$ とおく．ただし，T は直交行列，$\boldsymbol{c}$ は定ベクトルである．すると

$$\tilde{p}_u = Tp_u\,, \quad \tilde{p}_v = Tp_v\,, \quad \tilde{p}_{uu} = Tp_{uu}\,, \quad \tilde{p}_{uv} = Tp_{uv}\,, \quad \tilde{p}_{vv} = Tp_{vv}\,.$$

さらに，$\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを $\tilde{\nu}$ とすると $\tilde{\nu} = (\det T)\,T\nu$ となるので，直接計算で p と $\tilde{p}$ の第一基本量と第二基本量を求め，(8.5) 式に代入すればよい．　□

曲面上の，ガウス曲率 K が正となる点を**楕円点**，$K = 0$ となる点を**放物点**，$K < 0$ となる点を**双曲点**という．これらの点について次の定理が成り立つ．

定理 8.3　ガウス曲率 K が正になる点（楕円点）の近くでは，曲面は凸（とつ）になり，負になる点（双曲点）の近くでは曲面は鞍（くら）状になる（図 8.1）．

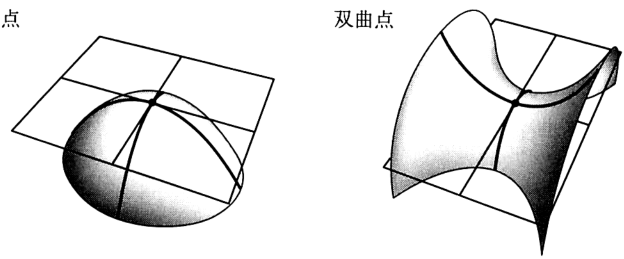


図 8.1

［**証明**］　曲面上の点 P を固定する．適当に回転と平行移動をほどこして，P は原点で，P における曲面の接平面は xy 平面としてよい．曲面を $p = p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と成分表示し，uv 平面から xy 平面への写像 $\varphi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ を考える．ここで $\mathrm{P} = (0,0,0) = p(u_0, v_0)$ とすると，

$$p_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), 0) = (\varphi_u, 0)\,,$$
$$p_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), 0) = (\varphi_v, 0)$$

が一次独立だから，φ のヤコビ行列式は (u_0, v_0) において 0 でない．したがって，逆関数定理（付録 A-1 の定理 1.5）より，xy 平面の原点の近傍で定義された φ の逆写像 ψ が存在する．このことから (x, y) を曲面の座標系として取り直すことができ，曲面を P（原点）のまわりで $z = f(x, y)$ のグラフで表せることがわかる．すると $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ となるので，テイラーの定理（付録 A の定理 1.2）により

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2\} + o(x^2 + y^2)$$

となる．これは曲面が原点付近で 2 次曲面

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \tag{8.6}$$

$$(\,a = f_{xx}(0,0),\ b = f_{xy}(0,0),\ c = f_{yy}(0,0)\,)$$

で近似されることを意味する．いま $a = c = 0$ で $b \neq 0$ のときは (8.6) は双曲放物面を表すので，原点の近くで鞍状である．また $a \neq 0$ のときは (8.6) は

$$z = \frac{1}{2}\left[a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2\right]$$

と変形できる．とくに $ac - b^2 = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ならば $f(x, y)$ のグラフは xy 平面で分けられる空間の一方の側にあり，原点の近くで曲面は図 8.1 左のような形になる．また $ac - b^2 < 0$ ならば原点の近くで曲面は図 8.1 右のような形になる．$c \neq 0$ のときは x と y の役割を入れ替えることにより同様のことがいえる．一方，曲面のガウス曲率 K は

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2}{(1 + {f_x}^2 + {f_y}^2)^2}$$

となる（節末問題の **3** 参照）． □

このほかガウス曲率，平均曲率について次のことが知られている．

- K と H がすべての点で零なら，$L = M = N = 0$ となり，曲面は平面の一部になる（節末問題の **7** 参照）．
- K がすべての点で零になる曲面は，局所的に伸び縮みなしに平面上に正確な地図を描くことができる（付録 B-4 および §14 を参照せよ）．
- H がすべての点で零になる曲面は**極小曲面**とよばれる．針金の枠を石

鹸水につけたときにできる石鹸膜の形は極小曲面であることが知られている．任意の区分的になめらかな空間単純閉曲線について，それを境界にもつ極小曲面の存在が知られている．ただし，一意性は必ずしも成立しない．

ガウス曲率が一定の回転面

ガウス曲率 K が一定であるような回転面を構成しよう．円柱，円錐，そして球面はガウス曲率が一定であることがわかるが，この他にもたくさん例をつくることができる．

曲面 $p(u,v)$ に対して，それを c 倍に拡大した曲面 $cp(u,v)$ のガウス曲率，平均曲率は，元の曲面のガウス曲率，平均曲率のそれぞれ $1/c^2$ 倍，$1/c$ 倍になる（節末問題の **5** 参照）ので，ガウス曲率が $0,1,-1$ の場合のみを考えればよいことに注意しよう．

まず xz 平面上の，弧長 s をパラメータとする曲線

$$\gamma(s)=(x(s),z(s))\qquad (x(s)>0)$$

を z のまわりに回転してできる曲面

$$p(u,v):=(x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(u))\qquad (0\leqq v<2\pi)$$

のガウス曲率と平均曲率を求めよう．パラメータ u が $\gamma(u)$ の弧長であることから

$$(x')^2+(z')^2=1 \tag{8.7}$$

である．この式の両辺を u で微分して，

$$x'x''+z'z''=0 \tag{8.8}$$

を得る．第一基本形式は，(8.7) を用いて

$$\begin{aligned}ds^2=dp\cdot dp&=\{(x')^2+(z')^2\}du^2+x^2dv^2\\&=du^2+x^2dv^2\end{aligned}$$

となるから，第一基本量は $E=1$，$F=0$，$G=x^2$ となる．一方，曲面の単位法線ベクトルは

$$\nu(u,v)=(-z'(u)\cos v,\ -z'(u)\sin v,\ x'(u))$$

なので，これを外微分して

$$d\nu = (-z''\cos v,\ -z''\sin v,\ x'')\,du + (z'\sin v,\ -z'\cos v,\ 0)\,dv$$

であるから，第二基本形式を求めると

$$II = -dp\cdot d\nu = (x'z'' - z'x'')\,du^2 + xz'\,dv^2$$

となり，$L = x'z'' - z'x''$，$M = 0$，$N = xz'$ を得る．ここで (8.7) と (8.8) から $x'z'' - z'x'' = -x''/z'$ となるから

$$L = -\frac{x''}{z'}$$

を得る[1]．したがって，この曲面のガウス曲率 K と平均曲率 H は

(8.9)
$$K = \frac{LN}{EG} = -\frac{xx''}{x^2} = -\frac{x''}{x},$$

(8.10)
$$H = \frac{EN+GL}{2EG} = \frac{xz' - (x^2x''/z')}{2x^2} = \frac{z'}{2x} - \frac{x''}{2z'}$$

となる．これを用いてガウス曲率が一定の回転面を決定しよう．

（i） $K=0$ のとき： 式 (8.9) より $K=0$ ならば $x''=0$ となるから，これを解いて，(8.7) と合わせて

$$x(u) = au + b,\quad z(u) = u\sqrt{1-a^2}\qquad (a, b \text{ は定数で，} |a| \leqq 1)$$

なる表示が得られる．とくに $a=0$ のときは得られる曲面は**円柱面**，$0<|a|<1$ のときは**円錐面**，$|a|=1$ のときは**平面**となる．

（ii） $K=1$ のとき： (8.9) より $x''=-x$ となる．この微分方程式を解いて，x は

$$\begin{aligned} x(u) &= \alpha\cos u + \beta\sin u \quad (\alpha, \beta \text{ は定数}) \\ &= a\cos(u+\delta) \qquad (a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \delta = \arctan(\alpha/\beta)) \end{aligned}$$

と書けるが，これは周期関数なので $x(u) = a\cos u$（$a>0$）として一般性を失わない．これと (8.7) より

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1-a^2\sin^2 t}\,dt$$

となる．とくに，$a=1$ のときは**球面**が得られる．また，$a<1$ のときはラグビーボール型，$a>1$ のときは樽(たる)型の回転面となる（図 8.2 (a)）．

1） §2の式 (2.11) より L は平面曲線（$x(s), z(s)$）の曲率となる．

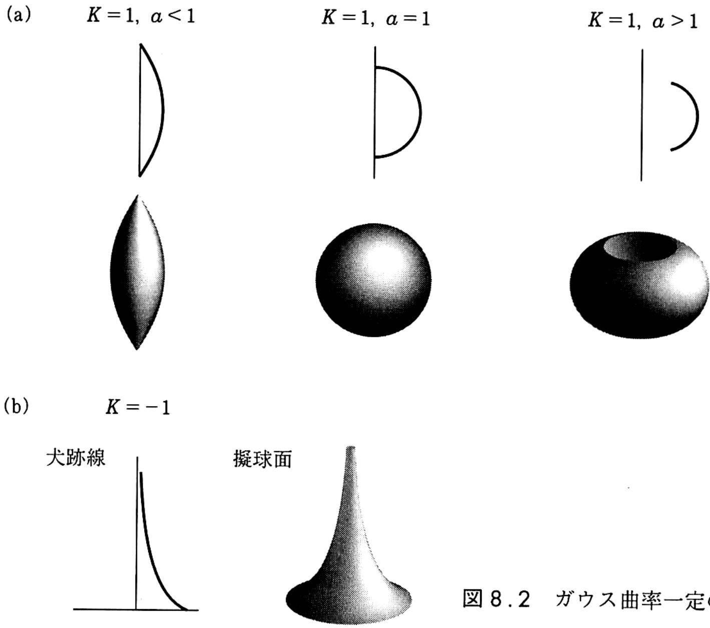


図 8.2　ガウス曲率一定の回転面

(iii)　$K = -1$ のとき：$x'' = x$ となるから，この微分方程式を解くと

$$x(u) = a\,e^{u} + b\,e^{-u} \qquad (\,a, b\ \text{は定数}\,)$$

である．これと (8.7) より

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (a\,e^{t} - b\,e^{-t})^2}\,dt$$

となる．とくに $a = 1$ で $b = 0$ のとき

(8.11)[2]
$$x(u) = e^{u}, \qquad z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{2t}}\,dt$$

から得られる回転面を**擬球面**という (図 8.2 (b))．この曲面は xy 平面と交わるところでなめらかでない．

---

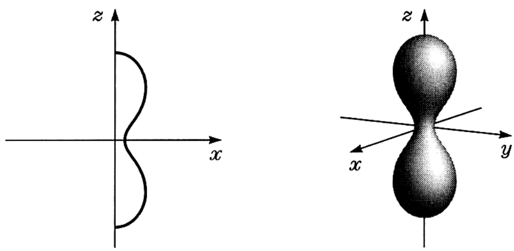
2)　式 (8.11) で与えられる xz 平面の曲線は，犬跡線(トラクトリクス)とよばれる．xz 平面において，曲線上の各点から z 軸におろした接線の長さが 1 で一定という性質をもつ．犬跡線という名はこの性質に由来する．

同じ方法で平均曲率 H が 0 の回転面を決定することができる(節末問題の **6**).平均曲率が 0 でない定数の回転面については付録 B-6 で考察する.

練 習 問 題 8

1. 実数を成分とする 2 次の対称行列 A, B を考える.とくに B の固有値がすべて正のとき,$B^{-1}A$ の固有値は実数であることを証明せよ.

2. 下図のような,xz 平面上の曲線を,z 軸のまわりに回転させてできるひょうたん型の曲面のガウス曲率が正になる部分と負になる部分を直観的に指摘せよ.



3. 関数 $z=f(x, y)$ のグラフのガウス曲率と平均曲率を求めよ.

4. §6 であげた楕円放物面,双曲放物面,楕円面,一葉双曲面,二葉双曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ.

5. 曲面 $p(u, v)$ のガウス曲率,平均曲率をそれぞれ K, H とする.正の定数 c に対して,$p(u, v)$ を c 倍に拡大〔縮小〕してできる曲面 $cp(u, v)$ のガウス曲率,平均曲率は,それぞれ $K/c^2, H/c$ となることを示せ.

6*. 回転面の中で極小曲面となるものを決定しよう.回転面の平均曲率の表示 (8.10) から,$H=0$ とすると

$$x(u)\,x''(u) = (z'(u))^2 = 1-(x'(u))^2$$

となることを確認せよ.さらに $(xx')'=1$ を示し,この式から $x(u)$ と $z(u)$ を求めて変数 u を消去すると,$z(u)$ が一定でなければ

$$x = a\cosh\left(\frac{z-b}{a}\right) \qquad (\,a,\,b\ \text{は定数で}\ a \neq 0\,)$$

となり，懸垂線(§1の例1.4)を z 軸のまわりに回転させた曲面が得られることを示せ．この曲面は**懸垂面**または**カテノイド**とよばれる代表的な極小曲面である(下図)．



7*. 曲面のガウス曲率と平均曲率が恒等的に0ならば，その第二基本量 L, M, N も恒等的に0となることを示せ．さらにこのような曲面は平面の一部になることを証明せよ．

8*. 平面の領域 D 上で定義された助変数表示 $p(u,v)$ と領域 $\tilde{D}$ 上で定義された助変数表示 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が同じ曲面の像を与えているとする．このとき，$\tilde{D}$ 上の点 (ξ,η) に対して $\tilde{p}(\xi,\eta)=p(u,v)$ となる (u,v) がただ一つ定まる．この対応 $F:(\xi,\eta)\mapsto(\,u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\,)$ が $\tilde{D}$ から D への微分同相写像になることを示せ．(ヒント：定理8.3の証明で示したように曲面は各点のまわりで $z=f(x,y)$ のグラフで表される．これを用いて，F がなめらかになることを示せばよい．そうすれば F^{-1} も同じ理由でなめらかになる．)

§ 9. 主方向・漸近方向

この節では，曲面の主曲率の幾何的な意味を紹介する．

曲面上の曲線　助変数表示された曲面 $p(u,v)$ 上に横たわっている空間曲線 $\gamma(s)$ を考える．ただし s は γ の弧長パラメータである．曲線 $\gamma(s)$ は曲面 $p(u,v)$ 上にあるから，

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s)) \tag{9.1}$$

をみたす uv 平面上の曲線 $(u(s), v(s))$ が存在する．この曲線の速度ベクトルは，合成関数の微分公式によって，

$$\gamma'(s) = p_u(u(s), v(s))\,u'(s) + p_v(u(s), v(s))\,v'(s) \tag{9.2}$$

となる．とくに s は $\gamma(s)$ の弧長パラメータであるから，

$$\gamma'\cdot\gamma' = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = 1 \tag{9.3}$$

が成り立っている．

ここで，$\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトルは，曲面に接するベクトルと法線方向のベクトルの和に一意的に分解できるから，曲線 γ の加速度ベクトル γ'' を

$$\gamma''(s) = \boldsymbol{\kappa}_g + \boldsymbol{\kappa}_n \qquad \left(\begin{array}{l}\boldsymbol{\kappa}_g \text{ は曲面に接するベクトル，} \\ \boldsymbol{\kappa}_n \text{ は法線方向のベクトル}\end{array}\right)$$

と分解できる．この分解において $\boldsymbol{\kappa}_n$ を曲線 $\gamma(s)$ の**法曲率ベクトル**，$\boldsymbol{\kappa}_g$ を**測地的曲率ベクトル**という[1]．

法曲率　曲面の単位法線ベクトルを ν とすると，曲面上の曲線 $\gamma(s)$ の法曲率ベクトルは

$$\boldsymbol{\kappa}_n = (\gamma''(s)\cdot\nu)\,\nu$$

で与えられる．そこで，この係数を

1）　添字“n”は法曲率（normal curvature），“g”は測地的曲率（geodesic curvature）をそれぞれ表している．

$$\kappa_n := \gamma''(s)\cdot\nu$$

とおき，曲線の**法曲率**とよぶ．いま，uv 平面上の曲線 $(u(s), v(s))$ を用いて $\gamma(s)$ を (9.1) のように書いておけば，$\gamma'\cdot\nu=0$ であることから法曲率は，

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \gamma''(s)\cdot\nu = -\gamma'(s)\cdot\nu' \\ &= -(p_u u' + p_v v')\cdot(\nu_u u' + \nu_v v') \\ &= L(u')^2 + 2M u'v' + N(v')^2\end{aligned} \tag{9.4}$$

と表すことができる．ここで L, M, N は，(8.2) で定義した曲面の第二基本量である．曲線 γ の $\gamma(s)$ における接ベクトルは，(9.2) のように u', v' から決まるから，(9.4) 式は κ_n が曲線の接ベクトルから定まるということを表している．さらに曲線を弧長パラメータで表しているので法曲率 κ_n は曲線の接ベクトルの向きのみによって定まる．

法曲率の図形的な意味を考えよう．曲面の，法線を含む平面による切り口は平面曲線になるが，この曲線を曲面の**直截口**（ちょくさいこう）という（図 9.1）．

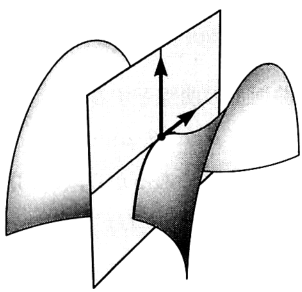


図 9.1　直截口

定理 9.1　弧長によってパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s)$ の点 P における法曲率は，点 P において $\gamma'(s)$ と同じ接ベクトルをもつ直截口の平面曲線としての曲率に等しい．ただし，直截口を含む平面には $\gamma'(s)$ の方向を x 軸，ν の方向を y 軸とする向きが入っているものとする．

[証明]　直截口の弧長パラメータによる表示を $\sigma(s)$ とする．法曲率は曲線の

接方向にしかよらないから，法曲率 κ_n は直截口の法曲率と一致する．とくに $\sigma''(s)\cdot\nu=\kappa_n$ となる．ところが，$\sigma''(s)$ は $\sigma'(s)=\gamma'(s)$ に直交し，法線と $\sigma'(s)=\gamma'(s)$ で張られる平面上の曲線だから $\sigma''(s)$ は ν に比例する．したがって $\sigma''=\kappa_n\nu$ となる．これは $\sigma(s)$ の平面曲線としての曲率が κ_n であることを示している． □

この定理によって，法曲率は，法線を含む各平面による曲面の切り口の曲率を表していることになり，各方向の曲面の曲がり具合を表していることがわかる．法曲率を具体的に計算するのに次の公式は便利である．

命題 9.2 uv 平面において u 軸から角度 θ をなす方向 (α,β) ($\beta=\alpha\tan\theta$) に対応する曲面上の法曲率 κ_n は次の式で与えられる：[2]

$$
\kappa_n=\frac{L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2}{E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2}
=\frac{L\cos^2\theta+2M\cos\theta\sin\theta+N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta+2F\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta}. \tag{9.5}
$$

ただし，E,F,G は曲面の第一基本量，L,M,N は第二基本量である．

［**証明**］ いま $\gamma(s)=p(u(s),v(s))$ を $s=0$ で u 軸から角度 θ をなす方向に出発する弧長をパラメータとする曲面上の曲線とすると

$$
(u'(0),v'(0))=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)
$$

となる正の数 ρ が存在する．助変数 s は弧長であるから，(9.3) より，

$$
\begin{aligned}
1&=Eu'(0)^2+2Fu'(0)v'(0)+Gv'(0)^2\\
&=\rho^2(E\cos^2\theta+2F\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．この式と (9.4) より，次のように求める式を得る：

$$
\begin{aligned}
\kappa_n&=Lu'(0)^2+2Mu'(0)v'(0)+Nv'(0)^2\\
&=\rho^2(L\cos^2\theta+2M\cos\theta\sin\theta+N\sin^2\theta)\\
&=\frac{L\cos^2\theta+2M\cos\theta\sin\theta+N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta+2F\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta}.
\end{aligned}
$$

□

2) この公式の角度 θ は，あくまで uv 平面における角度であって，曲面上における実際の角度ではない．曲面上の角度を用いて法曲率を表す公式がオイラーの公式（定理 9.7）である．

曲面上の点 $\mathrm{P}=p(u_0, v_0)$ を任意に固定したとき，Pを通り弧長をパラメータとする曲面上の曲線 $\gamma(s)=p(u(s), v(s))$ のPにおける法曲率の最大値，最小値を求めよう．命題9.2より κ_n は角度 θ についての周期 π をもつ連続関数とみなせるから，最大値 λ_1，最小値 λ_2 をもつ．それは (9.5) 式より α, β を変数とする関数

$$\lambda(\alpha, \beta)=\frac{L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2}{E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2} \qquad ((\alpha, \beta)\in \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\})$$

の $\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ における最大値，最小値と一致する．そのような (α, β) では $\partial\lambda/\partial\alpha=\partial\lambda/\partial\beta=0$ となるから，

$$L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2-(E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2)\lambda=0$$

の両辺を α, β について偏微分することにより，最大値，最小値をとる (α, β) に対して

$$\text{(9.6)} \qquad \begin{cases} (L-\lambda E)\alpha+(M-\lambda F)\beta=0, \\ (M-\lambda F)\alpha+(N-\lambda G)\beta=0 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる．この連立1次方程式に $(0,0)$ でない解 (α, β) が存在するためには

$$\det\begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{pmatrix}=0$$

でなければならない．つまり点Pにおける法曲率 κ_n の最大値 λ_1 と最小値 λ_2 はともに λ についての2次方程式

$$\text{(9.7)} \qquad (EG-F^2)\lambda^2-(EN+GL-2FM)\lambda+LN-M^2=0$$

の解である．したがって，2次方程式 (9.7) の解と係数の関係から，

$$\text{(9.8)} \qquad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=\dfrac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}=2H, \\[2ex] \lambda_1\lambda_2=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=K \end{cases}$$

が成り立つ．とくに λ_1, λ_2 は，行列

$$A=\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

の固有値，すなわち主曲率と一致する．以上より，次のことがわかった．

命題 9.3 曲面上の点Pにおける法曲率の最大値，最小値は，その点における主曲率に一致し，それらの積と平均がガウス曲率と平均曲率である．とくに，主曲率(行列 A の固有値)は実数である．

曲面の点Pにおける主曲率 λ_1, λ_2 を与える接ベクトルの方向 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を点Pにおける**主方向**という．点Pにおける曲面の接ベクトルを $\alpha \boldsymbol{p}_u + \beta \boldsymbol{p}_v$ と表すと，このベクトルが主方向であるための必要十分条件は，λ を主曲率として α, β が (9.6) をみたすことである．

主曲率 λ_1 と λ_2 が一致する点は，曲面の**臍点**(せいてん)とよばれる[3]．主曲率は (9.5) の最大値，最小値であったから，臍点においては，この式の値は (α, β) によらず一定で，すべての方向が主方向となる．つまり臍点は「あらゆる方向に曲がり具合いが同じ点」といえる．(9.8) より

$$4(H^2 - K) = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

であるから，次の命題を得る．

命題 9.4 曲面上の点が臍点であるための必要十分条件は，その点で

$$H^2 - K = 0$$

となることである．

半径 a の球面のガウス曲率と平均曲率はそれぞれ $1/a^2$，$\pm 1/a$ であるから(練習問題8の**4**参照)，球面はすべての点が臍点となる曲面である．逆に次のことが成り立つ．

命題 9.5 すべての点が臍点である曲面は平面または球面の一部である．

証明は演習問題とする(節末問題の**3**)．

3) 「臍」は「へそ」と読む．

以下，臍点でない点の近くでの曲面の挙動を調べよう．

定理 9.6　曲面上の臍点でない点における 2 つの主方向は直交する．

［**証明**］　曲面 $p(u,v)$ の第一基本行列，第二基本行列をそれぞれ $\widehat{I}, \widehat{II}$ とする．式 (9.6) から，2 つの主方向

$$\boldsymbol{e}_1 = \alpha_1 p_u + \beta_1 p_v, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \alpha_2 p_u + \beta_2 p_v$$

に対する平面ベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

は，

$$(\widehat{II} - \lambda_1 \widehat{I})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = 0, \qquad (\widehat{II} - \lambda_2 \widehat{I})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_2 = 0$$

をみたすから，それぞれ $A = \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ の固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルである．$\widehat{I}, \widehat{II}$ は対称行列だから

$$\lambda_1\,{}^t\tilde{\boldsymbol{e}}_2 \widehat{I} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = {}^t\tilde{\boldsymbol{e}}_2 \widehat{I} A \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = {}^t\tilde{\boldsymbol{e}}_2 \widehat{II}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = {}^t(A\tilde{\boldsymbol{e}}_2)\,\widehat{I}\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \lambda_2\,{}^t\tilde{\boldsymbol{e}}_2 \widehat{I} \tilde{\boldsymbol{e}}_1$$

となるが，臍点でない点では $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので ${}^t\tilde{\boldsymbol{e}}_2 \widehat{I} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = 0$ が成り立つ．このことは，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が直交することを意味している（69 ページの式 (7.12) 参照）．□

このことから，曲面上の臍点でない点 P に対して，P における接平面上に P を原点とする xy 座標軸をとり，それらの方向が主方向となるように座標軸をとることができる．これを用いて，法曲率を求める次の公式を得る．

定理 9.7（オイラーの公式）　曲面上の臍点でない点 P において上に述べたような座標系をとり，x 軸方向の主曲率を λ_1，y 軸方向の主曲率を λ_2 とする．接平面において x 軸から角度 φ をなす方向の法曲率を κ_n とすると

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi \tag{9.9}$$

が成り立つ．

［**証明**］　定理 8.3 の証明で見たように，曲面は P の近くで $z = f(x,y)$ のグラフで表されている．曲面は xy 平面と接しているから $f_x(0,0) = 0$，$f_y(0,0) = 0$ なので，とくに原点において第一基本量は $E = G = 1$，$F = 0$ となる．すると，命題 9.2 の $\theta = 0$，$\theta = \pi/2$ としたものが主曲率であるから，$\lambda_1 = L$，$\lambda_2 = N$

となる．さらに $LN-M^2=K=\lambda_1\lambda_2=LN$ だから $M=0$ を得る．したがって x 軸から角度 φ をなす方向の法曲率は命題 9.2 より (9.9) で与えられる． □

命題 9.2 における角度 θ は，助変数の uv 平面における角度で，必ずしも実際の曲面上での角度を表しているわけではない．一方，オイラーの公式 (9.9) に現れる角度 φ は，曲面上で実測した主方向からの角度であり，命題 9.2 より普遍的な公式が得られたことになる．

漸近方向　法曲率が 0 となる方向を**漸近方向**という．

命題 9.8　曲面上のガウス曲率 K が正となる点には漸近方向は存在しない．臍点でない $K=0$ となる点にはただ一つの漸近方向が存在する．$K<0$ となる点には相異なる 2 つの漸近方向が存在する．

［**証明**］　臍点でない点における主曲率を λ_1, λ_2 とすると，定理 9.7 より，λ_1 に対応する主方向から角度 φ をなす方向の法曲率は (9.9) で与えられている．もし $K>0$ なら λ_1 と λ_2 は同符号なので法曲率が 0 になることはない．一方，$K<0$，すなわち λ_1 と λ_2 が異符号ならば，φ が 0 から $\pi/2$ まで動く間と，$\pi/2$ から π まで動く間にそれぞれ法曲率が 0 となる箇所がちょうど 1 つずつ存在することがわかる．また $K=0$ で臍点でなければ，主曲率のどちらか 1 つだけが 0 となる．このときは，その 0 となる主方向が唯一の漸近方向である． □

次の定理は，漸近方向の幾何学的な意味を与えている．

定理 9.9　曲面上の $K<0$ となる点 P における接平面による曲面の切り口は，P 付近で交叉する 2 本の曲線となる．この 2 本の曲線の P における接線の方向は，ともに曲面の漸近方向に一致する．

［**証明**］　定理 9.7 の証明で述べたように，点 P における接平面上に P を原点とする xy 座標軸で x 軸，y 軸の方向がともに主方向になるようなものをとり，曲面をグラフ $z=f(x,y)$ で表すと，$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$ なので，P において $E=G=1$，$F=0$，さらに，

$$L = f_{xx}(0,0) = \lambda_1, \quad M = f_{xy}(0,0) = 0, \quad N = f_{yy}(0,0) = \lambda_2$$

となる．したがってテイラーの定理(付録Aの定理1.2)より

$$f(x,y) = Lx^2 + Ny^2 + o(|x|^2 + |y|^2) \qquad (o(\cdot)\text{はランダウの記号})$$

と表せる．$LN = K < 0$ であるから，必要なら x 軸と y 軸を入れ換えることによって，$L = a^2$, $N = -b^2$ ($a, b > 0$) と書くことができる．このとき，$f(x,y)$ は原点の近くで

$$f(x,y) = (ax + by)(ax - by) + o(|x|^2 + |y|^2)$$

と書ける．接平面は xy 平面であることから，これと曲面との切り口は $f(x,y) = 0$ で表される xy 平面上の曲線である．したがって，原点近くの切り口の2本の曲線の接線は $ax \pm by = 0$ であることがわかる．

一方，オイラーの公式 (9.9) から x 軸と角度 φ をなす方向の法曲率は

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi = L\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi$$

となる．とくに κ_n が0すなわち漸近方向になるような φ に対して

$$0 = L\cos^2\varphi + N\sin^2\varphi = (a\cos\varphi + b\sin\varphi)(a\cos\varphi - b\sin\varphi)$$

が成り立つ．よって漸近方向は $ax \pm by = 0$ の直線の方向に一致することがわかり，接平面との切り口の接線の方向と一致することが示された． □

ガウス曲率が負になる点で，2つの異なる漸近方向のなす角の意味が次で与えられる．

命題 9.10 曲面上のガウス曲率が負となる点における2つの漸近方向は，曲率方向によって2等分される．また，2つの漸近方向のなす角を μ ($0 < \mu \leqq \pi/2$) とすると，

$$\tan\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}} \tag{9.10}$$

が成り立つ．ただし $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ とする．

これは，オイラーの公式から簡単に示すことができるので読者の演習問題としておこう(節末問題の**4**)．

練習問題 9

1. 曲面上の曲線 γ の点Pにおける法曲率を κ_n，γ の空間曲線としての曲率を κ とする．曲面のPにおける単位法線ベクトル ν と $\gamma(s)$ のPにおける主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ のなす角を θ とするとき，$\kappa_n = \kappa\cos\theta$ となることを示せ(ムーニエ[4]の定理)．

2. 回転面の主方向は母線方向と回転方向であることを示せ．

3*. 曲面 $p(u, v)$ の定義域上すべての点が臍点とする．

(1) 曲面の主曲率を λ，第一基本量を E, F, G，第二基本量を L, M, N とすると，$L = \lambda E$，$M = \lambda F$，$N = \lambda G$ が成り立つことを示せ．

(2) 曲面の単位法線ベクトルを ν とするとき，ν_u, ν_v が p_u, p_v, ν の一次結合で表されることを用いて，$\nu_u = -\lambda p_u$，$\nu_v = -\lambda p_v$ となることを示せ．

(3) さらに $\nu_{uv} = \nu_{vu}$ であることを用いて λ が定数であることを示せ．

(4) $\lambda = 0$ のときは練習問題8の**7**より曲面は平面の一部である．$\lambda \neq 0$ のとき，$p - (1/\lambda)\nu$ が定ベクトルであることから，曲面が球面であることを示せ．

4. 命題9.10を証明せよ．

5. 曲面上の $K < 0$ かつ $H = 0$ となる点において2つの漸近方向は直交することを示せ．(とくに極小曲面は，接平面による切り口が互いに直交する曲線となるものとして特徴づけることができる．)

---

4) Meusnier, Jean-Baptiste Marie (1754 - 1793).

§ 10. 測地線とガウス・ボンネの定理

平面の三角形の内角の和は2直角(π)である. 曲面上の「三角形」の内角の和がどのようになるか調べよう. 平面上の三角形は直線(線分)で囲まれる図形であるが, 曲面上の「三角形」を定義するために, まず直線に相当する曲面上の概念として測地線を考える.

測地線 平面上の線分は2点を結ぶ曲線のうち最も短いものである. それでは曲面上の2点を結ぶ最短の曲面上の曲線は何だろうか.

一般に, 助変数表示された曲面 $p(u,v)$ 上に横たわっている空間曲線 $\gamma(t)$ を考える. ただしパラメータ t は γ の弧長とは限らない. 曲線 $\gamma(t)$ は曲面 $p(u,v)$ 上にあるから, uv 平面上の曲線 $(u(t), v(t))$ が存在して $\gamma(t)=p(u(t), v(t))$ と書ける. ここで, §9でも述べたように $\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトルは, 曲面に接する(tangent)ベクトルと法線(normal)方向のベクトルの和に一意的に分解できるから, 加速度ベクトル $\ddot{\gamma}$ を

$$\ddot{\gamma}(t)=[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}+[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{N}} \qquad \left(\begin{array}{l}[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}\ \text{は曲面に接するベクトル,}\\ [\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{N}}\ \text{は法線方向のベクトル}\end{array}\right)$$

と分解できる. この分解において $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}=0$ となるような曲面上の曲線 $\gamma(t)$ を**測地線**という. 定義より $\gamma(t)$ が測地線ならば $\ddot{\gamma}(t)$ と $\dot{\gamma}(t)$ は直交する. このことから $\dot{\gamma}\cdot\dot{\gamma}$ を微分すれば次を得る.

命題 10.1 曲面上の曲線 $\gamma(t)$ が測地線ならば $|\dot{\gamma}(t)|$ は一定である. すなわち, パラメータ t は弧長に比例する.

定義から, 曲面上の測地線に沿って一定の速さで車を運転したとすると, 車に乗っている人は, 曲面に垂直な方向には速度の変化(加速)を感じるが, 真横の方向には加速を感じない. このことは測地線が最も効率よく曲面を移動する経路であることを意味している.

例 10.2 平面上の直線は，直線上の1点Aの位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，直線に平行な零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて $\gamma(t)=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$ と助変数表示できる．このとき $\ddot{\gamma}(t)=0$ となるから，これは測地線である． ◇

例 10.3 円柱と同じ半径のつるまき線は§5の例5.1(46ページ)のように助変数表示すれば測地線となる(節末問題の**2**参照)． ◇

例 10.4 球面を，その中心を通る平面で切った切り口の曲線のことを**大円**という．原点を中心とする半径1の球面における大円は，それを含む平面の互いに直交する単位ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ を用いて，

$$\gamma(s)=(\cos s)\boldsymbol{e}_1+(\sin s)\boldsymbol{e}_2$$

と助変数表示できる．とくに s は弧長パラメータになっており，$\gamma''(s)=-\gamma(s)$ は接平面に直交することがわかるから，これは測地線になる． ◇

測地線と最短線 平面や球面では，2点を結ぶ最短線が測地線になっていることがわかるが，一般に次が成り立つ．

定理 10.5 曲面上の2点 P, Q を結ぶ曲面上のなめらかな最短線が存在すれば，その弧長パラメータによる表示は測地線である．

[**証明**] 曲面上の曲線 $\gamma(s)$ $(0\leqq s\leqq l)$ を2点 P, Q を結ぶ曲面上の最短線とする．端点を固定したままこの曲線を変形すると，その長さは短かくはならないはずである．このことを用いて定理を示す．

まず「曲線を変形する」ということを定式化しよう．十分小さな正の数 ε をとって，次の性質をもつ曲線の族 $\{\gamma_w(s)\}_{|w|<\varepsilon}$ を考える(図10.1)．

- 各実数 w を定めるごとに γ_w は $0\leqq s\leqq l$ で定義された曲面上の曲線で $\gamma_w(0)=\mathrm{P}$，$\gamma_w(l)=\mathrm{Q}$ が成り立つ．
- $\gamma_w(s)$ は，(w,s) の2変数関数としてなめらかな関数(C^∞ 級)である．
- $\gamma_0=\gamma$ である．

このような曲線の族 $\{\gamma_w\}_{|w|<\varepsilon}$ を，曲線 $\gamma(s)$ の**端点を固定する変分**という．曲線を変形する方法は無数に存在するから，このような変分は無数に存在する．

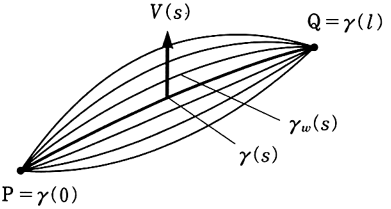


図 10.1 曲線の変分

曲線 γ の端点を固定する変分 $\{\gamma_w\}$ が与えられたとき，

$$V(s) := \left.\frac{\partial \gamma_w(s)}{\partial w}\right|_{w=0}$$

によって定義される $V(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ は $\gamma(s)$ を始点とするベクトルとなっており，曲面の接ベクトルになっている．このように $\gamma(s)$ の各点に曲面の接ベクトルが対応しているとき，これを曲面上の γ に沿うベクトル場という．とくに，この $V(s)$ を変分 $\{\gamma_w\}$ の**変分ベクトル場**とよぼう．

いま，P, Q を結ぶ最短線 $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ が弧長によってパラメータづけられているとして，その端点を固定する変分 $\{\gamma_w\}$ を考える．パラメータ s は $\gamma = \gamma_0$ の弧長パラメータであるが，一般に γ_w $(w \neq 0)$ の弧長になっているとは限らない．

曲線 $\gamma(s)$ は 2 点を結ぶ曲線の中の最短線であるから，w を動かしたとき γ_w の長さ

$$\mathcal{L}(\gamma_w) = \int_0^l |\gamma_w'(s)|\, ds \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right)$$

は $w = 0$ で最小になる．とくに

$$\left.\frac{d}{dw}\right|_{w=0} \mathcal{L}(\gamma_w) = 0 \tag{10.1}$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned}
(10.2)\quad & \left.\frac{d}{dw}\right|_{w=0} \mathcal{L}(\gamma_w) \\
&= \left.\frac{d}{dw}\right|_{w=0} \int_0^l |\gamma_w'(s)|\, ds = \int_0^l \left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_{w=0} \sqrt{\gamma_w'(s)\cdot\gamma_w'(s)}\, ds \\
&= \int_0^l \gamma_0'(s)\cdot\left(\left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_{w=0} \gamma_w'(s)\right)\frac{ds}{|\gamma_0'|} = \int_0^l \gamma_0'(s)\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_{w=0} \gamma_w(s)\right) ds \\
&= \int_0^l \gamma'(s)\cdot V'(s)\, ds = \Big[\gamma'(s)\cdot V(s)\Big]_{s=0}^{s=l} - \int_0^l \gamma''(s)\cdot V(s)\, ds
\end{aligned}$$

となる．ただし V は変分 $\{\gamma_w\}$ の変分ベクトル場である．ここで，変分は端点を固定しているから $\gamma_w(0)=\gamma(0)=\mathrm{P}$，$\gamma_w(l)=\gamma(l)=\mathrm{Q}$ となるので

$$V(0)=\left.\frac{\partial\gamma_w(0)}{\partial w}\right|_{w=0}=0, \qquad V(l)=0$$

が成り立つから

$$\left.\frac{d}{dw}\right|_{w=0}\mathcal{L}(\gamma_w)=-\int_0^l \gamma''(s)\cdot V(s)\,ds \tag{10.3}$$

を得る．式 (10.1) から，もし γ が最短線ならば，任意の変分 $\{\gamma_w\}$ に対して (10.3) の値が 0 にならなければならない．このことを利用して結論を示す．

曲線 $\gamma(s)$ は曲面上にあるので $\gamma(s)=p(u(s),v(s))$ と表すことができる．この曲線の，曲面に接する左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_g(s)$ とすると，これは各点で曲面に接するから

$$\boldsymbol{n}_g(s)=\alpha(s)\,p_u(u(s),v(s))+\beta(s)\,p_v(u(s),v(s))$$

が成り立つような $(\alpha(s),\beta(s))$ が存在する．そこで

$$\kappa_g(s):=\gamma''(s)\cdot\boldsymbol{n}_g(s)$$

とおく[1]．パラメータが弧長であるから γ' と γ'' が直交するので，κ_g が恒等的に 0 であることを示せば結論が得られたことになる．

いま $\kappa_g(c)\neq 0$ となる $c\ (0<c<l)$ の存在を仮定して (10.3) の値が 0 にならないような変分の存在を示したい．十分小さい正の数 δ を，区間 $(c-\delta,c+\delta)$ で $\kappa_g(s)$ が符号を変えないようにとっておく．この δ に対して，

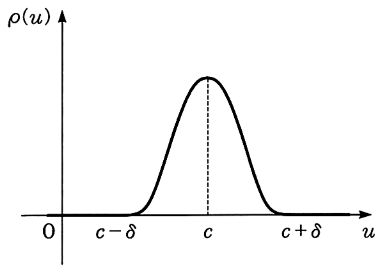


図 10.2 関数 ρ

$$\rho(u)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{(u-c)^2-\delta^2}\right) & (|u-c|<\delta),\\ 0 & (|u-c|\geqq\delta)\end{cases}$$

で関数 ρ を定義する (図 10.2)．この関数は $|u-c|<\delta$ で正の値をとり，

1) パラメータが弧長であることに注意すれば，この $\kappa_g\boldsymbol{n}_g$ は §9 で定義した測地的曲率ベクトルである．κ_g は**測地的曲率**とよばれる．

$|u-c| \geqq \delta$ で値 0 をとる，なめらかな関数である．いま $\gamma(s)$ の端点を固定する変分として

$$\gamma_w(s) = p(u(s) + w\rho(s)\alpha(s),\ v(s) + w\rho(s)\beta(s))$$

を考える．この変分の変分ベクトル場 $V(s)$ は

$$\begin{aligned} V(s) &= \left.\frac{\partial \gamma_w(s)}{\partial w}\right|_{w=0} \\ &= \rho(s)\{\alpha(s)\,p_u(u(s), v(s)) + \beta(s)\,p_v(u(s), v(s))\} \\ &= \rho(s)\,\boldsymbol{n}_g(s) \end{aligned}$$

となる．これを (10.3) に代入すると

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \mathcal{L}(\gamma_w)}{\partial w}\right|_{w=0} &= -\int_0^l \gamma''(s)\cdot V(s)\,ds \\ &= -\int_0^l \rho(s)\,(\gamma''(s)\cdot \boldsymbol{n}_g(s))\,ds \\ &= -\int_0^l \rho(s)\,\kappa_g(s)\,ds \end{aligned}$$

である．区間 $(c-\delta, c+\delta)$ で関数 $\rho(s)$ は正の値をとるから $\rho(s)\,\kappa_g(s)$ は符号を変えない．また，この区間の外側では $\rho(s)=0$ であるから

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}(\gamma_w)}{\partial w}\right|_{w=0} = -\int_{c-\delta}^{c+\delta} \rho(s)\,\kappa_g(s)\,ds \neq 0$$

となる．したがって，任意の変分に対して (10.1) が成り立つならば $\kappa_g = \gamma''\cdot\boldsymbol{n}_g \equiv 0$，すなわち γ は測地線でなければならない． □

弧長に比例するパラメータをもつ最短線は測地線であるが，逆は一般に正しくない．たとえば，球面上の大円は測地線であるが，2 点を通る大円の一方の弧は，その 2 点を結ぶ最短線であり，もう一方は一般に最短線にならない．しかし，測地線上の 2 点が十分近ければ，その測地線は 2 点を結ぶ最短線になることが知られている（たとえば [13] の 55 ページ参照）．

測地線の微分方程式　§7 で指摘したように，曲線の長さは第一基本量で決まる．とすれば，測地線も第一基本量だけからの情報で記述されるべきだろう．曲面 $p(u,v)$ の第一基本量 E, F, G を用いて天下り的に

$$
(10.4)\qquad
\begin{cases}
\Gamma_1{}^1{}_1 := \dfrac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\[2ex]
\Gamma_1{}^2{}_1 := \dfrac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\[2ex]
\Gamma_1{}^1{}_2 = \Gamma_2{}^1{}_1 := \dfrac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \\[2ex]
\Gamma_1{}^2{}_2 = \Gamma_2{}^2{}_1 := \dfrac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\[2ex]
\Gamma_2{}^1{}_2 := \dfrac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\[2ex]
\Gamma_2{}^2{}_2 := \dfrac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}
\end{cases}
$$

で定義される合計8個のなめらかな関数を**クリストッフェルの記号**[2)]という．定義から，これらの関数は第一基本量の1階微分までの情報で表されている．この記号を用いると，p の2階微分が

$$
(10.5)\qquad
\begin{cases}
p_{uu} = \Gamma_1{}^1{}_1 p_u + \Gamma_1{}^2{}_1 p_v + L\nu, \\
p_{uv} = \Gamma_1{}^1{}_2 p_u + \Gamma_1{}^2{}_2 p_v + M\nu, \\
p_{vv} = \Gamma_2{}^1{}_2 p_u + \Gamma_2{}^2{}_2 p_v + N\nu
\end{cases}
$$

と表される（§11の命題11.1）．ただし，L, M, N は考えている曲面 p の第二基本量，ν は単位法線ベクトルである．(10.5) を認めて，測地線の方程式が第一基本量だけの情報で書けていることを示そう．曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ の速度ベクトル，加速度ベクトルは，合成関数の微分公式から

$$
\begin{aligned}
\dot\gamma &= \dot u\, p_u + \dot v\, p_v, \\
\ddot\gamma &= \ddot u\, p_u + \ddot v\, p_v + \dot u^2 p_{uu} + 2\dot u\dot v\, p_{uv} + \dot v^2 p_{vv} \\
&= \{\ddot u + \dot u^2 \Gamma_1{}^1{}_1 + 2\dot u\dot v\, \Gamma_1{}^1{}_2 + \dot v^2 \Gamma_2{}^1{}_2\} p_u \\
&\qquad + \{\ddot v + \dot u^2 \Gamma_1{}^2{}_1 + 2\dot u\dot v\, \Gamma_1{}^2{}_2 + \dot v^2 \Gamma_2{}^2{}_2\} p_v + \{\dot u^2 L + 2\dot u\dot v\, M + \dot v^2 N\}\nu
\end{aligned}
$$

となるから，91ページに述べた記号を用いて

2） Christoffel, Erwin Bruno (1829 - 1900).

$$[\ddot{\gamma}]^{\mathrm{T}}=\{\ddot{u}+\dot{u}^2\Gamma_1{}^1{}_1+2\dot{u}\dot{v}\,\Gamma_1{}^1{}_2+\dot{v}^2\Gamma_2{}^1{}_2\}p_u \\ +\{\ddot{v}+\dot{u}^2\Gamma_1{}^2{}_1+2\dot{u}\dot{v}\,\Gamma_1{}^2{}_2+\dot{v}^2\Gamma_2{}^2{}_2\}p_v$$

を得る．ここで p_u と p_v とは一次独立だから，$\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ が測地線であるための必要十分条件は，$u(t),v(t)$ が次の微分方程式をみたすことである：

$$(10.6)\qquad \begin{cases} \ddot{u}+\dot{u}^2\Gamma_1{}^1{}_1+2\dot{u}\dot{v}\,\Gamma_1{}^1{}_2+\dot{v}^2\Gamma_2{}^1{}_2=0\,, \\ \ddot{v}+\dot{u}^2\Gamma_1{}^2{}_1+2\dot{u}\dot{v}\,\Gamma_1{}^2{}_2+\dot{v}^2\Gamma_2{}^2{}_2=0\,. \end{cases}$$

これを**測地線の方程式**という．

新しい変数 $\tilde{u},\tilde{v}$ を用いて (10.6) を１階の微分方程式

$$(10.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}=\tilde{u}\,, \quad \dfrac{d\tilde{u}}{dt}=-\Gamma_1{}^1{}_1\,\tilde{u}^2-2\Gamma_1{}^1{}_2\,\tilde{u}\tilde{v}-\Gamma_2{}^1{}_2\,\tilde{v}^2\,, \\ \dfrac{dv}{dt}=\tilde{v}\,, \quad \dfrac{d\tilde{v}}{dt}=-\Gamma_1{}^2{}_1\,\tilde{u}^2-2\Gamma_1{}^2{}_2\,\tilde{u}\tilde{v}-\Gamma_2{}^2{}_2\,\tilde{v}^2 \end{cases}$$

に書き換えると，常微分方程式論の基本定理（付録 A の定理 2.1）が適用できる形になる．とくに，曲面上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ と，P で曲面に接する零でないベクトル

$$\boldsymbol{w}=\xi\,p_u(u_0,v_0)+\eta\,p_v(u_0,v_0)$$

を与えると，微分方程式 (10.7) の初期条件

$$u(0)=u_0\,,\quad v(0)=v_0\,,\quad \tilde{u}(0)=\frac{du}{dt}(0)=\xi\,,\quad \tilde{v}(0)=\frac{dv}{dt}(0)=\eta$$

をみたす解が十分小さい t の範囲でただ一つ存在する．この解 $u(t),v(t)$ に対して，曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ は $\gamma(0)=\mathrm{P}$，$\dot{\gamma}(0)=\boldsymbol{w}$ をみたす曲面上の唯一の測地線である．

このように，測地線の微分方程式の解 $(u(t),v(t))$ を求めることによって uv 平面上に測地線に対応する曲線を描くことができる．これは，uv 平面を地図と思ったとき，地図上に最短ルートを記すことを意味する．

ガウス・ボンネの定理 測地線は「まっすぐな」曲線と思うことができる．そこで，曲面上の異なる3点を結ぶ3本の測地線で囲まれた単連結[3]な有界閉集合を**測地三角形**，または単に**三角形**という．この3点を測地三角形の**頂点**といい，それらを結ぶ測地線の部分を**辺**という．測地三角形の1つの頂点における内角とは，その頂点における2本の辺の接ベクトルのなす角を，この領域の側から測ったものとする．

平面上の三角形の内角の和は π であったが，曲面上の測地三角形の内角の和について，次の定理が成り立つ．

定理 10.6（ガウス[4]・ボンネ[5]の定理） 曲面上の測地三角形 $\triangle \mathrm{ABC}$ の内角を $\angle \mathrm{A}, \angle \mathrm{B}, \angle \mathrm{C}$ とすると次が成り立つ：

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi + \iint_{\triangle \mathrm{ABC}} K\, dA\,.$$

ここで dA は曲面の面積要素（§6 参照），K はガウス曲率である．

この定理の証明は，次の §11 で行う[6]．

ガウス・ボンネの定理により，とくにガウス曲率が正の曲面では三角形の内角の和は π より大きくなり，ガウス曲率が負の曲面では内角の和は π より小さくなることがわかる（節末問題の **6** 参照）．

ところで，§7 で指摘したように，三角形の面積要素や内角はいずれも第一基本量 E, F, G だけの情報で決まる（67, 69 ページ参照）．また，測地線

3） この場合，円板 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\} \subset \boldsymbol{R}^2$ との間に位相同型が存在することと同値である．すなわち，穴が開いていない三角形領域である．単連結性の正確な定義は [11] の第3章などを見よ．

4） Gauss, Carl Friedrich (1777 - 1855).

5） Bonnet, Pierre Ossian (1819 - 1892).

6） ガウス・ボンネの定理は，空間の曲面に限らず一般の2次元リーマン多様体上で成り立つ定理である．また，辺が測地線でない三角形についても，少しの修正の上で同様の定理が成立する．このことの証明は §13 で与える．

の方程式 (10.6) も第一基本量だけで書かれている．一方，ガウス・ボンネの定理より，測地三角形を描き，その内角の和を測定すれば，その値によって三角形の内部のガウス曲率の平均値が測定できることになる．このことから，(8.5) で定義されたガウス曲率も，第一基本量だけの式で書けることが予想される．実際，ガウス曲率 K は第一基本量 E, F, G を用いて

$$
\begin{aligned}
K = &\frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + (G_u)^2)}{4(EG-F^2)^2} \\
&+ \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\
&+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2)}{4(EG-F^2)^2} \\
&- \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

と表される(§11 の定理 11.2)．この式は，定義上は第一基本量と第二基本量を用いて表されるガウス曲率が，実は第一基本量 E, F, G の 2 階微分までの情報で表されることを意味している．この事実を発見したガウスは，これを「驚異の定理」と名付けた．

式 (10.8) やガウス・ボンネの定理の意味することは大きい．地球の表面に貼り付くようにして住んでいるわれわれのように，曲面上に住んでいて，自分たちの世界を外から見ることができないような人々を想像しよう．この曲面の住人は，曲面上の曲線の長さや角度を測ることによって曲面の第一基本量を求めることができると考えられるので，測量によってガウス曲率を求めることができる．これに対して，平均曲率は第一基本量だけから求めることはできない．

《参考》 式 (10.8) の応用として，正確な地図をつくることはできないことを示そう．正確な地図とは，地球(球面)上のある領域が，平面の領域に距離を保ったまま対応づけられているものをいう．このような対応づけがあるとすると，命題 7.3 から球面上に第一基本量が $E=G=1$，$F=0$ をみたす座標系が存在することになり，球面のガウス曲率は 0 にならなければならず矛盾が導かれた． ◇

19世紀にガウスがこれらの結果を見いだした少し後，リーマン[7]は次のようなことを考えた：「曲面を空間から取り出すことはできないだろうか．この場合，曲面の外側の世界という概念は存在しなくなるから，第一基本形式のみが意味をもつ．そこには長さと角度ばかりか，曲面の曲がり具合まで情報として含まれているのだから充分に豊富な曲面の理論が展開できるだろう．」このことが，リーマンが多様体の概念を生みだす動機の一つとなった．

閉曲面への応用　曲面を小さな測地三角形に分割する[8]．このとき，1つの三角形に**向きをつける**とは，三角形の辺をひと回りする向きを1つ定めて，それを「正の向き」と指定することである．隣り合う2つの三角形で共有する辺の向きが逆になっているとき，2つの三角形の向きは同調しているという(図10.3)．

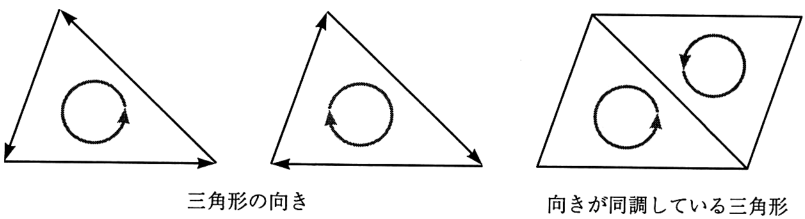


図10.3　三角形の向き

三角形分割された曲面上の1つの三角形に向きをつけておき，隣りの三角形には同調する向きをつけて，すべての三角形に順々に向きをつけていく．このようにして，すべての三角形の向きが矛盾なくつけられるとき，この曲面は**向きづけ可能**とよばれる．たとえばメビウスの帯(練習問題6の**2**)は向きづけ不可能であり，球面は向きづけ可能である．

7）　Riemann, Bernhard (1826 - 1866).

8）　このような分割が可能であることは自明ではないが，それについては§17で述べる．

球面や輪環面(練習問題6の**1**)などは $\boldsymbol{R}^3$ の有界閉集合になっている．このような曲面を**閉曲面**という．このような閉曲面(定義より自己交叉しない)は向きづけ可能であることが知られている[9]．たとえば§6 (61ページ)で紹介したクラインの壺やウェンテトーラスは自己交叉をもつ「一般化された」曲面の例である．以下の定理は，閉曲面ばかりでなくこのような向きづけ可能でない曲面を含む「広い意味の閉曲面」についても適用できることに注意されたい．

定理 10.7（大域的なガウス・ボンネの定理） 閉曲面 S を三角形に分割したとき，その分割に対して

$$\chi(S) := (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

とおく[10]と

$$\iint_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ．ただし，K は曲面のガウス曲率，dA は面積要素である．

［**証明**］ 曲面 S を測地三角形に分割する．分割において生じた n 個の頂点を $v_1, \cdots, v_n$ とし，各 v_j には，m_j 個の測地三角形 $T_{j,1}, \cdots, T_{j,m_j}$ が集まっているとする(図10.4)．頂点 v_j に集まる三角形の内角の総和は 2π であるから，測地三角形に関するガウス・ボンネの定理10.6より

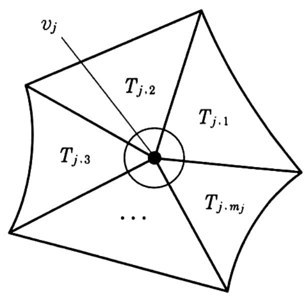


図10.4

$$2\pi n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_j}(T_{i,j}\text{ の }v_i\text{ での内角})$$

$$= (\text{すべての測地三角形の内角の和}) = \iint_S K\,dA + \pi\cdot(\text{面の数})$$

を得る．ところが，1本の辺は2個の測地三角形に共有され，1個の三角形は3本の辺に囲まれるから，$3\cdot(\text{面の数}) = 2\cdot(\text{辺の数})$ となるので，頂点の個数が n

9) この事実の証明はやさしくない．

10) ギリシア文字 "χ" は「カイ」と読む．ローマ文字 "x"（エックス）とは異なる文字である．

であることと合わせて

$$\iint_S K\,dA = 2\pi n - \pi\cdot(\text{面の数})$$
$$= 2\pi\cdot(\text{頂点の数}) - 2\pi\cdot(\text{辺の数}) + 2\pi\cdot(\text{面の数})$$
$$= 2\pi\chi(S)$$

となり，結論を得る． □

ここで

$$\chi(S) := (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

は，閉曲面の**オイラー数**とよばれる．定理 10.7 の結論の式の左辺は，曲面の測地線による三角形分割の方法によらず一定である．さらに，辺が測地線であるとは限らない三角形分割に対しても，同じ値をとることが知られている．すなわち，$\chi(S)$ は曲面の三角形分割によらない量である．

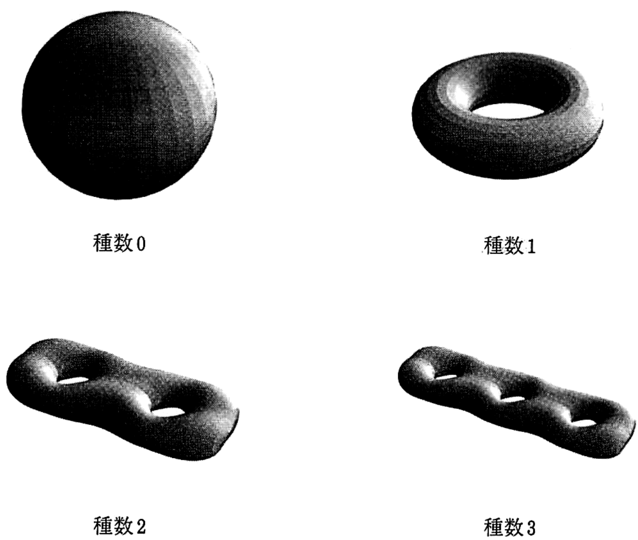
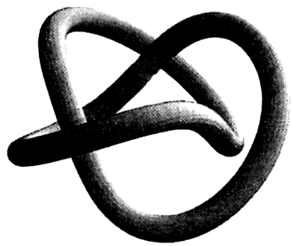


図 10.5　曲面の種数

一般に(向きづけ可能な)閉曲面は，図 10.5 のような「g 人乗りの浮袋」のいずれかと同相[11] になる．この g を閉曲面の**種数**という．たとえば図 10.6 は種数 1 の閉曲面である．種数が同じ 2 つの曲面は，$\boldsymbol{R}^3$ の曲面として一方から他方に連続的に変形できるとは限らないが，曲面を外の空間 $\boldsymbol{R}^3$ から切り離して「多様体」とみなせば同じ構造をしている．


図 10.6　種数1の曲面の例

さらに，曲面の種数とオイラー数について，

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

という関係式が知られている．すなわち，曲率の計算をすることで，このような曲面の「つながり具合」を表す不変量が求まるわけである．

双曲幾何

曲面が $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合として実現されていることを忘れても，曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が定める領域上で第一基本形式がわかれば，長さ，角度，面積，そしてガウス曲率を知ることができる．このことから，uv 平面の領域上に第一基本形式を形式的に与えれば，そこで幾何学を考えることができる．

[1]　ユークリッド幾何

uv 平面は $\boldsymbol{R}^3$ の曲面とみなすことができ，そのときの第一基本形式は $ds_{\mathrm{E}}{}^2 = du^2 + dv^2$ で与えられる．平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P} = (u_1, v_1)$ および $\mathrm{Q} = (u_2, v_2)$ を結ぶ区分的になめらかな曲線の長さの下限を 2 点間の距離を $d_{\mathrm{E}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ とすると

$$d_{\mathrm{E}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) := \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

この距離に関して平面図形を研究する幾何学をユークリッド幾何という．この幾何学においては，2 点を結ぶ最短線は線分である．平面のガウス曲率は 0 であるから，ガウス・ボンネの定理の意味は「三角形の内角の和は π (180 度)である」と

11)　すなわち，閉曲面から「g 人乗りの浮袋」への全単射な連続写像で，その逆写像も連続であるものが存在する．

いうことになる.

ユークリッド幾何の命名は，ギリシアのユークリッド[12]が，有名な著作「原論[13]」で，平面幾何学の理論を展開したことに由来する．そこでは，5つの公準と5つの公理とよばれる命題を仮定して，それをもとに平面幾何学の理論が展開されている．公準と公理は，それ自体証明の必要がない大前提であったが，第5公準：「1直線が他の2直線と交わるとき，この直線の同じ側にある内角の和が2直角より小さければ，はじめの2直線はこの側において交わる」は，次に紹介する双曲幾何の発見まで，他の公準・公理から導けるのではないかと考えられていた.

[2] 双曲平面

uv 平面の u 軸より上の領域 $D := \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ を上半平面という．上半平面上に

$$d{s_\mathrm{H}}^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

で第一基本形式を与える[14]と，これによって曲線の長さを測ることができる．D 上の2点 $\mathrm{P} = (u_1, v_1)$，$\mathrm{Q} = (u_2, v_2)$ を結ぶ区分的になめらかな曲線の長さの下限を2点間の距離 $d_\mathrm{H}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ とすると

$$d_\mathrm{H}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) := \log\left(\frac{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2} + \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}{\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2} - \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}\right)$$

となる(§14の問題**3**参照)．D 上の異なる2点 P, Q を通り，u 軸上に中心をもつ円がただ一つ存在する．その円の円弧 $\widehat{\mathrm{PQ}}$ をPとQを結ぶ線分とみなせば，これが P, Q を結ぶ最短線になる(図10.7)．すると，ユークリッドの第5公準(平行線公理)はみたされないが，それ以外のすべての公準はみたされる.

このような平行線公理をみたさない幾何(**双曲幾何**)はロバチェフスキー[15]とボーヤイ[16]により19世紀に発見された．$d{s_\mathrm{H}}^2$ のガウス曲率は -1 となる(§14参照)ので，ガウス・ボンネの定理より三角形の内角の和は2直角より小さい．ユー

---

12) Euclid (330？- 275？, B.C.).

13) 訳書として，[15]がある.

14) 添字Hは双曲的(hyperbolic)の頭文字である.

15) Lobachevskiĭ, Nikolai Ivanovich (1793 - 1856).

16) Bolyai, Janos (1802 - 1860).

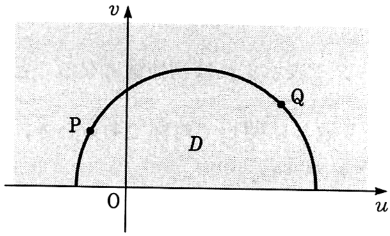


図 10.7 双曲平面

クリッド幾何のピタゴラスの定理に対応して，∠C が直角である双曲平面上の直角三角形 △ABC に対して，

$$\cosh \mathrm{AB} = \cosh \mathrm{BC} \cdot \cosh \mathrm{AC} \qquad (*)$$

が成立する．ロバチェフスキーとボーヤイは，平面を飛び越して，次元を一つ上げた 3 次元双曲空間において，**ホロスフィア**とよばれる曲面上でユークリッド幾何が成り立つことを示した．さらに双曲平面上の直角三角形を，この曲面で直角三角形になるように射影して，通常のピタゴラスの定理を用いて公式（*）を示した．新しい平面幾何を発見するのに，次元の高い空間を用いるというのは何とも不思議な話ではあるが，彼らは全く独立にホロスフィアを用いて双曲平面の発見にたどり着いたのである．ここであげた上半平面による双曲幾何の簡単なモデル[17]が発見されたのは 20 世紀初頭のことである．

練 習 問 題 10

1. 曲面が直線を含むとき，その直線を弧長によってパラメータ表示すれば，それは測地線であることを示せ．

2. 円柱の測地線は，母線であるか，円柱と同じ半径のつるまき線を弧長に比例するパラメータで表示したものであることを示せ．この事実を円柱の展開図を用いて説明せよ．

17) この上半平面 D 全体を第一基本形式が $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ となるように $\boldsymbol{R}^3$ の曲面として実現することは不可能であることが知られている（ヒルベルトの定理．[6] の第 3 章参照）．

3. 球面の測地線は弧長に比例するパラメータで表示した大円に限ることを示せ．

4. 回転面の母線は，弧長パラメータで表示すれば測地線になることを示せ．

5*. 曲面が，ある平面に関する折り返しに関して対称であるとき，その平面による曲面の切り口は測地線になることを示せ．

6*. 次の手順で，半径 1 の球面上の測地三角形に対して，ガウス・ボンネの定理を証明せよ（下図）．

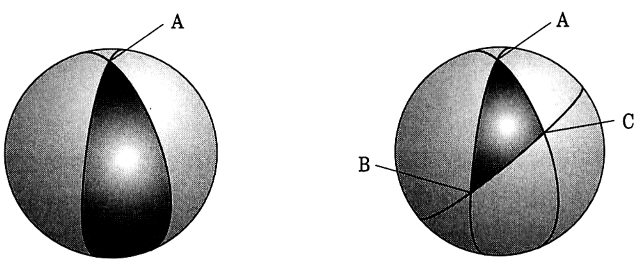
（1） 単位球面上の 1 点 A で角 $\angle A$ をなす 2 つの大円は，A と球面の中心に関して点対称な点（対蹠点[18] とよばれる）で交わる．このとき，この 2 つの半円で囲まれた三日月形の部分の面積は $2 \times \angle A$ であることを確かめよ．

（2） 球面上の測地三角形 $\triangle ABC$ の内角を $\angle A, \angle B, \angle C$ としておく．すると，A を頂点とする 2 本の辺を延長してできる 2 つの三日月形，B を頂点とする 2 本の辺を延長してできる 2 つの三日月形，C を頂点とする 2 本の辺を延長してできる 2 つの三日月形，合わせて 6 つの領域は，球面全体を覆う．このとき，三角形 $\triangle ABC$ と，その各頂点の対蹠点を頂点にもつ測地三角形の内部だけは 3 回，つまり 2 回余計に覆われることを確かめよ．

（3） 上で述べた 6 つの三日月形の面積の総和と，球面の面積を比べることによって，

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + (\triangle ABC \text{の面積})$$

であることを示せ．



18) 「たいしょてん」と読むこともある．

§11*. ガウス・ボンネの定理の証明

本節では§10で紹介したガウス・ボンネの定理10.6に証明を与えるが，その証明は少しの修正で一般の2次元リーマン多様体に対しても通用する．一般の2次元リーマン多様体に対するガウス・ボンネの定理とその別証明については§13を参照せよ．

ガウスの方程式　まず，準備としてガウス曲率を第一基本量で表せること（§10の式(10.8)）を示そう．

命題11.1（式(10.5)）助変数表示された曲面 $p(u,v)$ の第一基本量を E, F, G，第二基本量を L, M, N とすると

$$\begin{cases} p_{uu} = \Gamma_1{}^1{}_1\, p_u + \Gamma_1{}^2{}_1\, p_v + L\nu\,, \\ p_{uv} = \Gamma_1{}^1{}_2\, p_u + \Gamma_1{}^2{}_2\, p_v + M\nu\,, \\ p_{vv} = \Gamma_2{}^1{}_2\, p_u + \Gamma_2{}^2{}_2\, p_v + N\nu \end{cases}$$

が成り立つ．ただし $\Gamma_i{}^k{}_j$ は式(10.4)（96ページ）で定義されたクリストッフェルの記号，ν は曲面の単位法線ベクトルである．

［証明］各 (u,v) に対して $p_u(u,v)$，$p_v(u,v)$，$\nu(u,v)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底を与えるので

$$\text{(11.1)} \qquad \begin{cases} p_{uu} = \overline{\Gamma}_1{}^1{}_1\, p_u + \overline{\Gamma}_1{}^2{}_1\, p_v + \overline{L}\nu\,, \\ p_{uv} = \overline{\Gamma}_1{}^1{}_2\, p_u + \overline{\Gamma}_1{}^2{}_2\, p_v + \overline{M}\nu\,, \\ p_{vv} = \overline{\Gamma}_2{}^1{}_2\, p_u + \overline{\Gamma}_2{}^2{}_2\, p_v + \overline{N}\nu \end{cases}$$

とおくことができる．ここで $\overline{\Gamma}_i{}^k{}_j, \overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ は (u,v) のある関数である．この $\overline{\Gamma}_i{}^k{}_j$ がクリストッフェル記号 $\Gamma_i{}^k{}_j$ に等しく，$\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ が第二基本量に等しいことを示せばよい．

単位法線ベクトル ν は p_u, p_v に直交する単位ベクトルであるから，(11.1)の各式の両辺に ν を内積すると，第二基本量の定義から $L=\overline{L}$，$M=\overline{M}$，$N=\overline{N}$ であることがわかる．

一方，(11.1) の第1の式の両辺に p_u を内積して，積の微分公式 $(p_u\cdot p_u)_u = 2p_{uu}\cdot p_u$ を用いれば，

$$\frac{1}{2}E_u = p_{uu}\cdot p_u = \bar{\Gamma}_1{}^1{}_1 E + \bar{\Gamma}_1{}^2{}_1 F$$

を得る．また $p_{uu}\cdot p_v = (p_u\cdot p_v)_u - \frac{1}{2}(p_u\cdot p_u)_v$ となるので，(11.1) の第1式の両辺に p_v を内積すれば

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \bar{\Gamma}_1{}^1{}_1 F + \bar{\Gamma}_1{}^2{}_1 G$$

となる．同様に (11.1) の第2式，第3式に p_u, p_v を内積すれば，

$$\frac{1}{2}E_v = \bar{\Gamma}_1{}^1{}_2 E + \bar{\Gamma}_1{}^2{}_2 F\,, \qquad \frac{1}{2}G_u = \bar{\Gamma}_1{}^1{}_2 F + \bar{\Gamma}_1{}^2{}_2 G\,,$$

$$F_v - \frac{1}{2}G_u = \bar{\Gamma}_2{}^1{}_2 E + \bar{\Gamma}_2{}^2{}_2 F\,, \qquad \frac{1}{2}G_v = \bar{\Gamma}_2{}^1{}_2 F + \bar{\Gamma}_2{}^2{}_2 G$$

を得る．これらをまとめて行列の形で表せば，

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_1{}^1{}_1 & \bar{\Gamma}_1{}^1{}_2 & \bar{\Gamma}_2{}^1{}_2 \\ \bar{\Gamma}_1{}^2{}_1 & \bar{\Gamma}_1{}^2{}_2 & \bar{\Gamma}_2{}^2{}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

となるが，§7 で見たように第一基本行列は正則行列であるから，その逆行列

$$\hat{I}^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

を (11.2) の左から掛ければ $\bar{\Gamma}_i{}^k{}_j$ が $\Gamma_i{}^k{}_j$ に一致することがわかる． □

定理 11.2（ガウスの方程式） 助変数表示された曲面 $p(u, v)$ の第一基本量を E, F, G，第二基本量を L, M, N とすると，ガウス曲率 K は

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + (G_u)^2)}{4(EG - F^2)^2} \\ & + \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG - F^2)^2} \\ & + \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2)}{4(EG - F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \tag{11.3}$$

のように，第一基本量とその2階までの偏導関数で表される．

[**証明**] 命題 11.1 の証明より，クリストッフェルの記号は，

$$\Gamma_1{}^1{}_1 E + \Gamma_1{}^2{}_1 F = \frac{1}{2} E_u, \qquad \Gamma_1{}^1{}_1 F + \Gamma_1{}^2{}_1 G = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

をみたす．ここで $p_{uuv} \cdot p_v = (p_{uu} \cdot p_v)_v - p_{uu} \cdot p_{vv}$ だから，命題 11.1 を用いて，

$$\begin{aligned} p_{uuv} \cdot p_v &= \{ (\Gamma_1{}^1{}_1 p_u + \Gamma_1{}^2{}_1 p_v + L\nu) \cdot p_v \}_v \\ &\quad - (\Gamma_1{}^1{}_1 p_u + \Gamma_1{}^2{}_1 p_v + L\nu) \cdot (\Gamma_2{}^1{}_2 p_u + \Gamma_2{}^2{}_2 p_v + N\nu) \\ &= (\Gamma_1{}^1{}_1 F + \Gamma_1{}^2{}_1 G)_v \\ &\quad - (\Gamma_1{}^1{}_1 E + \Gamma_1{}^2{}_1 F) \Gamma_2{}^1{}_2 - (\Gamma_1{}^1{}_1 F + \Gamma_1{}^2{}_1 G) \Gamma_2{}^2{}_2 - LN \\ &= \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right)_v - \frac{1}{2} E_u \Gamma_2{}^1{}_2 - \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right) \Gamma_2{}^2{}_2 - LN \end{aligned}$$

となる．この式に (10.4) を代入して整理すれば，

$$\begin{aligned} \text{(11.4)} \qquad p_{uuv} \cdot p_v &= F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} + \frac{E(E_v G_v - 2F_u G_v)}{4(EG - F^2)} \\ &\quad + \frac{G(E_u G_u - 2E_u F_v)}{4(EG - F^2)} \\ &\quad + \frac{F(E_u G_v + E_v G_u - 2F_u G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v)}{4(EG - F^2)} - LN \end{aligned}$$

を得る．同様に $p_{uvu} \cdot p_v = (p_{uv} \cdot p_v)_u - p_{uv} \cdot p_{uv}$ より，

$$\text{(11.5)} \qquad p_{uvu} \cdot p_v = \frac{1}{2} G_{uu} - \frac{EG_u{}^2 - 2FE_v G_u + GE_v{}^2}{4(EG - F^2)} - M^2$$

となるが，$p_{uuv} = p_{uvu}$ であるから，(11.4) と (11.5) の右辺は等しい．このことから $LN - M^2$ を E, F, G で表す式が得られる．ここで (8.5) よりガウス曲率は $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ なので，求めた $LN - M^2$ の両辺を $EG - F^2$ で割れば，結論が得られる． □

測地的極座標　ガウス・ボンネの定理の証明を行う際にガウス曲率を第一基本量で表現する公式 (11.3) が必要となるが，この式は非常に複雑な形をしている．そこで，まずガウス曲率が簡単な式で表されるような，曲面上の特別な座標を考えよう．

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の極座標とは，2 つの実数の組 (r, θ) ($r > 0$) に対して，原点からの距離が r，x 軸の正の部分から測った角が θ となる点を対応させるものである．これと同様に，曲面に 1 点 P を固定し，P で曲面に接し，互い

に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ をとる．このとき，この点のまわりの曲面の**測地的極座標**とは，実数の組（r, θ）（$r>0$）に対して，次のような曲面上の点 Q を一意的に対応させるものである（図 11.1）：

- P から Q に長さ r の測地線を引くことができる．
- その測地線の，点 P における接ベクトルと $\boldsymbol{e}_1$ のなす角は θ である．

十分小さい r の範囲でこのような座標系が存在する（この事実の証明はこの節の最後に行う）．

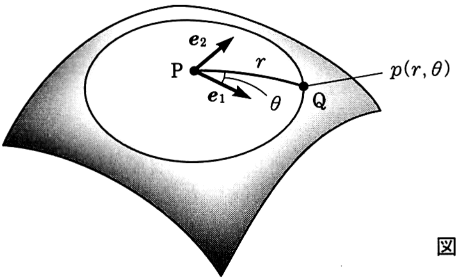


図 11.1 測地的極座標

曲面を点 P のまわりの測地的極座標で $p=p(r,\theta)$ と助変数表示する．このとき θ を 1 つ固定すると $p(s,\theta)$ は $s=0$ で P を通り弧長をパラメータとする測地線の助変数表示になっている．

補題 11.3 測地的極座標による曲面の助変数表示 $p(r,\theta)$ に対して

$$p_r \cdot p_r = 1, \quad p_r \cdot p_\theta = 0, \quad \lim_{r\to+0} \frac{p_\theta \cdot p_\theta}{r^2} = 1 \qquad \left(p_r = \frac{\partial p}{\partial r},\ p_\theta = \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)$$

が成り立つ．

［**証明**］ 角 θ を固定すれば $r \mapsto p(r,\theta)$ は r を弧長パラメータとする測地線であるから第 1 式は明らか．

ここで $p(0,\theta)=\mathrm{P}$（一定），また $p_r(0,\theta)$ は測地線 $r\mapsto p(r,\theta)$ の $r=0$ における接ベクトルであるから，

$$p_\theta(0,\theta)=0, \qquad p_r(0,\theta)=\cos\theta\, \boldsymbol{e}_1+\sin\theta\, \boldsymbol{e}_2$$

である(e_1, e_2 は測地的極座標の定義のときに用いたもの)．このことを用いて第2式，第3式を示そう．いま，$p_r \cdot p_r = 1$ であるから

$$(p_r \cdot p_\theta)_r = p_{rr} \cdot p_\theta + p_r \cdot p_{\theta r} = p_{rr} \cdot p_\theta + \frac{1}{2}(p_r \cdot p_r)_\theta = p_{rr} \cdot p_\theta$$

である．$r \mapsto p(r, \theta)$ は測地線であるから，p_{rr} は曲面の法線ベクトルの方向を向いているので $p_{rr} \cdot p_\theta = 0$ となり，θ を固定したとき $p_r \cdot p_\theta$ は r によらず一定となる．したがって

$$p_r(r, \theta) \cdot p_\theta(r, \theta) = p_r(0, \theta) \cdot p_\theta(0, \theta) = 0$$

となり第2式が得られた．

さらに $p(r, \theta)$ は (r, θ) に関してなめらか(C^∞ 級)であるから，ロピタルの定理(付録Aの定理1.3)より

$$\begin{aligned}\lim_{r \to +0} \frac{p_\theta \cdot p_\theta}{r^2} &= \lim_{r \to +0} \frac{p_{r\theta} \cdot p_\theta}{r} \\ &= \lim_{r \to +0} (p_{rr\theta} \cdot p_\theta + p_{r\theta} \cdot p_{r\theta}) = \lim_{r \to +0} p_{r\theta} \cdot p_{r\theta} \\ &= (-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2) \cdot (-\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2) = 1\end{aligned}$$

となり第3式が得られる．ただし，ここで $\lim_{r \to +0} p_\theta(r, \theta) = 0$ を用いた． □

測地的極座標 (r, θ) によって助変数表示されている曲面 $p = p(r, \theta)$ の第一基本形式は，補題11.3より

(11.6) $$ds^2 = dr^2 + h^2 d\theta^2$$

となる．ただし $h = h(r, \theta)$ は正の値をとる関数で，

(11.7) $$\lim_{r \to +0} \frac{h}{r} = 1 \qquad \text{したがって} \qquad \lim_{r \to +0} h_r = 1$$

となるものである．すなわち，第一基本量は $E = 1$，$F = 0$，$G = h^2$ と書けるから，式(11.3)を用いて，ガウス曲率は

(11.8) $$K = -\frac{h_{rr}}{h}$$

と表される．また，式(7.11)を用いて，面積要素 dA は

(11.9) $$dA = h\, dr\, d\theta$$

で与えられる．

測地線の方程式 (10.6) を計算することにより，曲面 $p(r,\theta)$ 上の曲線 $\gamma(s)=p(r(s),\theta(s))$ が測地線であるための必要十分条件は，

$$(11.10)\qquad \begin{cases} r''-hh_r(\theta')^2=0\,, \\ \theta''+2\dfrac{h_r}{h}r'\theta'+\dfrac{h_\theta}{h}(\theta')^2=0 \end{cases} \qquad \left({}'=\frac{d}{ds}\right)$$

をみたすことであることがわかる．これを用いて次の補題を示すことができる．

補題 11.4 測地的極座標表示された曲面 $p(r,\theta)$ に対し，弧長によりパラメータづけられた測地線 $\gamma(s)$ の速度ベクトル $\gamma'(s)$ とベクトル p_r が($\boldsymbol{R}^3$ において)なす角を $\varphi(s)$ とすると $\varphi'=-\theta' h_r$ が成り立つ(h は (11.6) で定義される関数)．

［**証明**］ (11.6) より p_r と p_θ/h は曲面の接平面の正規直交基底をなすことがわかる．よって，曲面に接する任意の単位ベクトルは

$$(\cos\varphi)p_r+\left(\frac{\sin\varphi}{h}\right)p_\theta$$

と書ける．補題での「なす角」とはこの φ のことである．

ところで，$\gamma(s)=p(r(s),\theta(s))$ とおくと，$\gamma'=r'p_r+\theta' p_\theta$ だから角度 φ の定義より

$$(11.11)\qquad r'=\cos\varphi\,,\qquad \theta'=\frac{1}{h}\sin\varphi$$

となる．測地線の方程式 (11.10) の第1式より

$$0=(\cos\varphi)'-hh_r\frac{1}{h^2}\sin^2\varphi=-\varphi'\sin\varphi-h_r\theta'\sin\varphi$$

となるから，$\sin\varphi\neq0$ ならば結論の式が成り立つことがわかる．$\sin\varphi(s)=0$ となるような点 $s=s_0$ についても，s_0 が $\sin\varphi(s_n)\neq0$ となるような数列 $\{s_n\}$ の極限となる場合には連続性より結論の式が成り立つ．一方，s_0 を含む開区間で $\sin\varphi(s)=0$ が成り立つ場合は，この区間で φ は定数なので $\varphi'=0$，また (11.11) より $\theta'=0$ なので結論が成り立つ． □

ガウス・ボンネの定理の証明　以上の準備のもと，測地三角形に関するガウス・ボンネの定理の証明を行う．

必要ならば，測地三角形をさらに小さい測地三角形に分割して，各々の小三角形が，その1つの頂点を中心とする測地的極座標系に含まれるようにすることができる[1]．このような小三角形に対して，ガウス・ボンネの定理が成り立つことを証明すれば，それらの総和をとることにより，一般の測地三角形に対しても，ガウス・ボンネの定理が成り立つことを示すことができる(図11.2左)．

そこで，以下，点Aのまわりの測地的極座標で曲面を $p(r,\theta)$ と助変数表示したとき，測地三角形 $\triangle$ABC は，この助変数が定める領域の p による像に含まれているものとする．

角Aの内角は $\angle$A だから，B, C の座標は，それぞれ $(r_B, 0)$，$(r_C, \angle A)$ であるとして一般性を失わない．ただし，r_B, r_C は辺 AB, AC の長さである．測地的極座標の定義から，任意の θ を固定すれば，$s \mapsto p(s,\theta)$ は点Aを通る測地線となる．とくに，$s \mapsto p(s,0)$ は辺AB，$s \mapsto p(s,\angle A)$ は辺ACを表している．

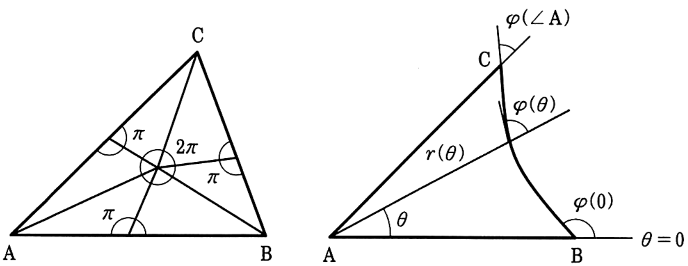


図11.2

辺BCは測地線であるが，それを $\gamma(s)=\gamma_{BC}(s)=p(r(s),\theta(s))$ $(0 \leqq s \leqq l)$ と弧長によってパラメータ表示しておく．ただし l は辺BCの長さで，$\gamma_{BC}(0)=$ B，$\gamma_{BC}(l)=$ C とする．すると，各 s に対して $\theta'(s) \neq 0$ が成り立ち，θ は単調増加関数となる．

1)　このことは明らかのように思えるが証明を必要とする．§17で証明を与える．

実際，もし $\theta'(s_0)=0$ となる s_0 が存在するならば，この点で辺 BC は，点 A を通る測地線 $s\mapsto p(s,\theta(s_0))$ と接するが，測地線の一意性（97 ページ参照）よりこれら 2 つの曲線は一致しなければならない．とくに測地線 γ_{BC} は A を通らなければならないことになり，これは不可能である．したがって $\theta(s)$ は単調関数であるが，$\theta(0)=0$，$\theta(l)=\angle\mathrm{A}$ であるから，単調増加である．

とくに，$\theta=\theta(s)$ の逆関数 $s=s(\theta)$ が存在するから，辺 BC は $r\theta$ 平面上の $r=r(\theta)$ のグラフとして表すことができる．したがって，△ABC は $r\theta$ 平面上の集合

$$\{(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq r(\theta),\ 0\leqq\theta\leqq\angle\mathrm{A}\}$$

の像になることがわかる．これを用いて (11.8), (11.9) と (11.7) から

$$\begin{aligned}\iint_{\triangle\mathrm{ABC}}K\,dA &= -\iint_{\triangle\mathrm{ABC}}h_{rr}\,dr\,d\theta = -\int_0^{\angle\mathrm{A}}d\theta\int_0^{r(\theta)}h_{rr}\,dr\\ &= -\int_0^{\angle\mathrm{A}}\Big[h_r\Big]_{r=0}^{r=r(\theta)}d\theta\\ &= -\int_0^{\angle\mathrm{A}}\{h_r(r(\theta),\theta)-h_r(0,\theta)\}\,d\theta\\ &= -\int_0^{\angle\mathrm{A}}\{h_r(r(\theta),\theta)-1\}\,d\theta\\ &= \angle\mathrm{A}-\int_0^{\angle\mathrm{A}}h_r(r(\theta),\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

を得る．ここで，測地線 $\gamma=\gamma_{\mathrm{BC}}$ について，補題 11.4 のように φ をとると $h_r=-\varphi'/\theta'$ であるから，パラメータ変換 $s=s(\theta)$ により φ を θ の関数とみなせば

$$\iint_{\triangle\mathrm{ABC}}K\,dA=\angle\mathrm{A}+\int_0^{\angle\mathrm{A}}\frac{d\varphi}{d\theta}\,d\theta=\angle\mathrm{A}+\varphi(\angle\mathrm{A})-\varphi(0)$$

である．ここで，頂点 B における内角 ∠B は $\pi-\varphi(0)$，頂点 C における内角 ∠C は $\varphi(\angle\mathrm{A})$ に等しい（図 11.2 右）．以上より

$$\begin{aligned}\iint_{\triangle\mathrm{ABC}}K\,dA &= \angle\mathrm{A}+\varphi(\angle\mathrm{A})-\varphi(0)\\ &= \angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}-(\pi-\angle\mathrm{B})=\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}-\pi\end{aligned}$$

となり，ガウス・ボンネの定理が得られた．

測地的極座標の存在　ここでは，この節の最初に述べた，測地的極座標の存在を証明する．まず，記述を簡単にするために次の補題を用意する：

補題 11.5　曲面 p 上の点 P に対して，P の近傍で定義された座標系 (u, v) で，P と曲面の第一基本量が次をみたすものが存在する：

$$\mathrm{P} = p(0,0), \quad E(0,0) = G(0,0) = 1, \quad F(0,0) = 0.$$

［**証明**］ 点 P を原点，P における曲面の接平面を xy 平面とするように $\boldsymbol{R}^3$ の座標軸をとると，曲面は $z = f(x, y)$ のグラフで表される（定理 8.3 (75 ページ)の証明参照）ので，$p(u, v) = (u, v, f(u, v))$ と助変数表示すれば，これが求める座標系であることが直接計算で確かめられる．□

曲面 $p = p(u, v)$ 上の点 P を 1 つ固定する．一般性を失なうことなく (u, v) は補題 11.5 のような座標系としてよい．このとき $E(0,0) = G(0,0) = 1$ であるから，$p_u(0,0)$ と $p_v(0,0)$ は P で曲面に接し，互いに直交する単位ベクトルである．一般に P で曲面に接するベクトル $\boldsymbol{w}$ は

(11.12)
$$\boldsymbol{w} = \xi p_u(0,0) + \eta p_v(0,0)$$

と一意的に表すことができる．いま，$t = 0$ で点 P を通り，速度ベクトルが $\boldsymbol{w}$ となるような曲面上の測地線を

$$\gamma(t; \boldsymbol{w}) = p(u(t; \xi, \eta),\ v(t; \xi, \eta))$$

と表すと，$u(t) = u(t; \xi, \eta)$，$v(t) = v(t; \xi, \eta)$ は測地線の微分方程式 (10.6) (97 ページ)の解で初期条件

(11.13)
$$(u(0), v(0), \dot{u}(0), \dot{v}(0)) = (0, 0, \xi, \eta)$$

をみたすものである．

補題 11.6　測地線が $\gamma(t; \boldsymbol{w}) = p(u(t; \xi, \eta), v(t; \xi, \eta))$ と与えられるとき，任意の定数 c に対して

$$u(ct; \xi, \eta) = u(t; c\xi, c\eta), \qquad v(ct; \xi, \eta) = v(t; c\xi, c\eta),$$

すなわち $\gamma(ct; \boldsymbol{w}) = \gamma(t; c\boldsymbol{w})$ が成り立つ．

［証明］ $\hat{u}(t) := u(ct; \xi, \eta)$，$\hat{v}(t) := v(ct; \xi, \eta)$ とおくと，

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(t) = c\frac{du}{dt}(ct; \xi, \eta), \qquad \frac{d^2\hat{u}}{dt^2}(t) = c^2\frac{du}{dt}(ct; \xi, \eta),$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt}(t) = c\frac{dv}{dt}(ct; \xi, \eta), \qquad \frac{d^2\hat{v}}{dt^2}(t) = c^2\frac{dv}{dt}(ct; \xi, \eta)$$

となるから，$\hat{u}(t), \hat{v}(t)$ も測地線の微分方程式 (10.6) の解である．また，$u(t) := u(t; c\xi, c\eta)$，$v(t) := v(t; c\xi, c\eta)$ も同じ初期条件 $(0, 0, c\xi, c\eta)$ をもつ (10.6) の解であるから，常微分方程式の解の一意性（付録 A の定理 2.1）より $\hat{u}(t) = u(t; c\xi, c\eta)$，$\hat{v}(t) = v(t; c\xi, c\eta)$ を得る． □

補題 11.7 ある正の数 ε が存在して，$\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2$ をみたす任意の (ξ, η) に対して微分方程式 (10.6) の初期条件 (11.13) をみたす解 $u(t; \xi, \eta)$，$v(t; \xi, \eta)$ は区間 $[0, 1]$ を含む t の範囲で定義されるようにできる．

［証明］ 常微分方程式の基本定理（付録 A の定理 2.1）より，十分小さい正の数 $\tilde{\varepsilon}, \delta$ が存在して，$\xi^2 + \eta^2 < \tilde{\varepsilon}^2$ ならば $u(t; \xi, \eta)$，$v(t; \xi, \eta)$ が区間 $0 \leqq t \leqq \delta$ で定義されているようにできる．ここで $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}\delta$ とおき，$\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon$ をみたす (ξ, η) をとれば，$(\xi/\delta)^2 + (\eta/\delta)^2 < \tilde{\varepsilon}$ だから $u(t; \xi/\delta, \eta/\delta)$，$v(t; \xi/\delta, \eta/\delta)$ は $0 \leqq t \leqq \delta$ の範囲で定義されている．一方，補題 11.6 より

$$u(t; \xi, \eta) = u\left(\delta t; \frac{\xi}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}\right), \qquad v(t; \xi, \eta) = v\left(\delta t; \frac{\xi}{\delta}, \frac{\eta}{\delta}\right)$$

であるが，それぞれの右辺は $0 \leqq \delta t \leqq \delta$ の範囲で定義されているので $u(t; \xi, \eta)$，$v(t; \xi, \eta)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で定義される． □

補題 11.7 で得られた ε をとれば，$\xi\eta$ 平面の領域 $D_\varepsilon := \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2\}$ から uv 平面への写像

(11.14) $\quad \varphi_{\mathrm{P}} : (\xi, \eta) \longmapsto \varphi_{\mathrm{P}}(\xi, \eta) = (u(1; \xi, \eta), v(1; \xi, \eta))$

が定まる．これは，(ξ, η) に対して $\xi p_u(0, 0) + \eta p_v(0, 0)$ を初速度にもつ測地線の $t = 1$ での点を対応させる写像である[2]．

2） 写像 φ_{P} は**指数写像**とよばれ “$\mathrm{Exp}_{\mathrm{P}}$” という記号で書かれることが多い．

命題 11.8 (11.14) で定義される写像 φ_{P} は $\xi\eta$ 平面の原点の十分小さい近傍から uv 平面の原点の近傍への微分同相写像を与える.

[証明] 補題 11.6 と (11.13) より

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(0,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(1;t,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(t;1,0) = 1\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(1;0,t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u(t;0,1) = 0\,.$$

同様に $v_\xi(0,0)=0$, $v_\eta(0,0)=1$ となるので, φ_{P} の $(0,0)$ におけるヤコビ行列は単位行列となり, 逆関数定理(付録 A の定理 1.5)から結論を得る. □

上の証明から (ξ,η) は曲面の P のまわりでの座標系を与えている[3]. これに対応する極座標 (r,θ) をとる. つまり

$$\xi = r\cos\theta\,, \qquad \eta = r\sin\theta$$

とおくと (11.14) より

$$\varphi_{\mathrm{P}}(r\cos\theta, r\sin\theta) = (u(r;\cos\theta,\sin\theta),\ v(r;\cos\theta,\sin\theta))$$

なので, uv 平面上の曲線 $r\mapsto\varphi_{\mathrm{P}}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ は測地線で, 曲面上の点 P において $p_u(0,0)$ と角度 θ をなす. したがって, (r,θ) はこの節のはじめで述べた測地的極座標となる. ◇

ガウス曲率の幾何学的意味*

曲面上の 1 点 P を中心とする測地的極座標 (r,θ) を考える十分小さい正の数 r に対して, P を中心とする半径 r の**測地円**とは, (r,θ) $(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ に対応する曲面上の曲線である. 平面上の半径 r の円の長さは $2\pi r$, 円で囲まれる領域の面積は πr^2 であるが, 一般の曲面では次が成り立つ.

定理 曲面上の点 P を中心とする半径 r の測地円の長さを $\mathcal{L}(r)$, その測地円で囲まれる曲面上の領域の面積を $\mathcal{A}(r)$ と書くとき,

$$K(\mathrm{P}) = \lim_{r\to+0}\frac{3}{\pi}\left(\frac{2\pi r-\mathcal{L}(r)}{r^3}\right) = \lim_{r\to+0}\frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi r^2-\mathcal{A}(r)}{r^4}\right)$$

が成り立つ. ただし $K(\mathrm{P})$ は点 P における曲面のガウス曲率である.

---

3) この座標系を**正規座標系**という.

[証明]　測地的極座標 (r,θ) に関する第一基本形式を式 (11.6) のように表しておくと,

$$\mathcal{L}(r)=\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\,d\theta$$

であるが, (11.7) より, $\lim_{r\to+0} h(r,\theta)=0$ だからロピタルの定理(付録 A の定理 1.3)より

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}\frac{2\pi r-\mathcal{L}(r)}{r^3}&=\lim_{r\to+0}\frac{1}{r^3}\left(2\pi r-\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\,d\theta\right)\\&=\lim_{r\to+0}\frac{1}{3r^2}\left(2\pi-\int_0^{2\pi} h_r(r,\theta)\,d\theta\right)\end{aligned}$$

である. これも不定形の極限であるから, 再びロピタルの定理を用いれば式 (11.8) より

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+0}\frac{2\pi r-\mathcal{L}(r)}{r^3}&=\lim_{r\to+0}\frac{1}{6r}\left(-\int_0^{2\pi} h_{rr}(r,\theta)\,d\theta\right)\\&=\lim_{r\to+0}\frac{1}{6}\left(\int_0^{2\pi} K(r,\theta)\frac{h(r,\theta)}{r}\,d\theta\right)\end{aligned}$$

となる. ここで (11.7) を用いれば結論が得られる. 第 2 の等式は, (11.7) に注意して

$$\mathcal{A}(r)=\int_0^r dr\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\,d\theta$$

に 3 回ロピタルの定理を適用すれば同様にして得られる.　□

練 習 問 題 11

1.　助変数表示された曲面 $p(u,v)$ の第一基本量を E,F,G, 第二基本量を L,M,N とする. このとき, 単位法線ベクトル ν の微分は

$$\nu_u=-\frac{GL-FM}{EG-F^2}p_u-\frac{EM-FL}{EG-F^2}p_v,$$

$$\nu_v=-\frac{GM-FN}{EG-F^2}p_u-\frac{EN-FM}{EG-F^2}p_v$$

と表されることを示せ. この関係式を**ワインガルテンの公式**という. さらに, これを用いて $\nu_u\times\nu_v=K(p_u\times p_v)$ (K はガウス曲率) が成り立つことを示せ.

第 III 章*

多様体論的立場からの曲面論

いままでの章で，曲線・曲面の話題を紹介してきたが，多様体論的な立場から曲面を眺めると，さらに広く深い視野が開けてくる．この章では，平均曲率一定曲面に関するホップの定理(定理 15.3)を目標に，今後，多様体の勉強を志す読者と，多様体論をすでに学んだ読者のために，曲面論の進んだ話題を紹介する．多様体上のベクトル場，微分形式，外積，外微分についての知識を仮定するが，これらについては，巻末に挙げた参考書を参照されたい．この章の内容が，読者の今後の勉強の指針となることを願う．

§ 12. 微分形式

2次元可微分多様体 S 上の実数値0次,1次,2次微分形式の全体をそれぞれ $\mathcal{A}^0(S), \mathcal{A}^1(S), \mathcal{A}^2(S)$ と書く．とくに，$\mathcal{A}^0(S)$ は，S 上の C^∞ 級関数全体の集合 $C^\infty(S)$ と一致する．これらの間に，外微分作用素とよばれる次の線形写像が定義されている：

$$d = d_0 \colon \mathcal{A}^0(S) \to \mathcal{A}^1(S), \qquad d = d_1 \colon \mathcal{A}^1(S) \to \mathcal{A}^2(S).$$

とくに，d_0 は，§7 で定義した外微分と同じものである．

多様体 S 上のなめらかなベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}^\infty(S)$ と書く．すると，1次微分形式とは

$$\alpha(fX) = f\alpha(X) \qquad (f \in C^\infty(S),\ X \in \mathfrak{X}^\infty(S))$$

をみたす線形写像 $\alpha \colon \mathfrak{X}^\infty(S) \to C^\infty(S)$ のことであり，2次微分形式は

$$\beta(X, Y) = -\beta(Y, X)$$
$$\beta(fX, Y) = \beta(X, fY) = f\beta(X, Y) \quad (f \in C^\infty(S),\ X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S))$$

をみたす双線形写像 $\beta \colon \mathfrak{X}^\infty(S) \times \mathfrak{X}^\infty(S) \to C^\infty(S)$ のことである．このことを用いて1次微分形式 α, β の外積とよばれる2次微分形式 $\alpha \wedge \beta$ を次で定義する[1)]：

(12.1)
$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) := \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)).$$

すると，1次微分形式 $\alpha \in \mathcal{A}^1(S)$ の外微分は

(12.2)
$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\,d\alpha \qquad (f \in C^\infty(S))$$

をみたす線形写像 $d \colon \mathcal{A}^1(S) \to \mathcal{A}^2(S)$ と特徴づけられ，外微分の公式

(12.3)
$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S))$$

1）外積を，この全体に 1/2 を掛けたものとして定義する流儀もあるので，他の書物を参照するときは注意されたい．

を示すことができる[2)]（節末問題の **1**）．ただし $[X, Y]$ はベクトル場 X, Y の交換子積を表す．

次に，多様体 S が向きづけられており，さらにリーマン計量 ds^2 が与えられている場合を考える．$(U; (u, v))$ を S の正に向きづけられた局所座標系とし，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を U 上で定義された正の向きの正規直交基底の場とする（節末問題の **2** 参照）．さらに，$\{\omega_1, \omega_2\}$ を U 上の2つの1次微分形式の組で，$\omega_j(\boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}$（クロネッカーのデルタ）をみたすもの，すなわち，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の双対（そうつい）基底の場とする（節末問題の **3**）．これらの外積を

$$d\hat{A} := \omega_1 \wedge \omega_2 \tag{12.4}$$

とおくと，これは，正の正規直交基底の取り方によらない．このことは，$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ をもう一組の正の向きの正規直交基底の場，$\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ をその双対基底の場とすると，各点ごとに実数 θ が存在して

$$\begin{cases} (\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{12.5}$$

が成り立つことからわかる．この $d\hat{A}$ をリーマン多様体 (S, ds^2) の（向きづけられた）**面積要素**という．局所座標系 (u, v) を用いれば，

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

という形に表示することができる[3)]．このとき

$$d\hat{A} = \sqrt{EG - F^2}\,du \wedge dv \tag{12.6}$$

と表される．第II章では

2） 外積の定義として前の脚注 1）に述べたような流儀を採用すると，右辺全体に 1/2 がかかる．

3） $du^2, dv^2, du\,dv$ は，1次微分形式の対称積を表している．一般に1次微分形式 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(S)$ に対して対称積は $(\alpha\beta)(X, Y) := (1/2)\{\alpha(X)\beta(Y) + \alpha(Y)\beta(X)\}$ $(X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S))$ で定義される．

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

のことを，曲面の面積要素とよんだ．ここでは dA を($d\hat{A}$ と区別して) S 上の**向きによらない面積要素**とよぶ．

以下，本節では，多様体 S はコンパクトとする．関数 $f \in C^\infty(S)$ に対して，積分

$$\int_S f\, dA$$

が定義される[4]．この定義は S が向きづけ可能でなくても有効である．S が向きづけられているときは，0 にならない 2 次微分形式 $d\hat{A}$ が存在するから，任意の 2 次微分形式 Ω は，関数 f を用いて $\Omega = f\, d\hat{A}$ と書くことができる．そこで Ω の S 上における積分を

$$\int_S \Omega = \int_S f\, d\hat{A} := \int_S f\, dA \tag{12.7}$$

で定義する[5]．

また，S の座標近傍 $(U\,;(u, v))$ 上のなめらかな曲線 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ 上の，1 次微分形式 $\alpha = f\,du + g\,dv$ の**線積分**とは，次で与えられる値である：

$$\int_\gamma \alpha := \int_a^b \left\{ f(u(t), v(t))\frac{du}{dt} + g(u(t), v(t))\frac{dv}{dt} \right\} dt. \tag{12.8}$$

この定義は γ のパラメータの取り方および S の座標系の取り方によらない．したがって，γ が S 上の区分的になめらかな曲線の場合にも，γ を分割して各部分がなめらかで 1 つの座標近傍に含まれるようにして，それらの線積分

---

4) 正確には，コンパクト多様体 S の有限個の座標近傍 $(U_j; (u_j, v_j))$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ による被覆と，その上の 1 の分割 $\{\rho_j\}$ をとる．すなわち，関数 $\rho_j \in C^\infty(S)$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ は，それぞれ U_j の外で 0 で，$\sum_{j=1}^{N} \rho_j = 1$ が成り立つ．このとき

$$\int_S f\, dA = \sum_{j=1}^{N} \int_{U_j} \rho_j f \sqrt{E_j G_j - F_j^2}\, du_j\, dv_j$$

と定義する．ただし，E_j, F_j, G_j は座標系 (u_j, v_j) に関する第一基本量である．

5) S が向きづけ不可能な場合には $d\hat{A}$ のようにいたるところ 0 にならない S 上の 2 次微分形式は存在せず，このような形で 2 次微分形式の積分を定義することができない．

の総和として，線積分 $\int_\gamma \alpha$ が定義される．このとき次が成り立つ．

定理 12.1（**ストークスの定理** [8]） 向きづけられた 2 次元多様体 S 上の領域 D の境界 ∂D は有限個の区分的になめらかな閉曲線から構成され，$\overline{D} := D \cup \partial D$ はコンパクトであるとする（図 12.1）．∂D の各曲線に D を左側にみるように向きを与えれば，$\overline{D}$ を含む領域で定義された 1 次微分形式 α に対して

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$$

が成り立つ．ただし，左辺は ∂D の各曲線上の線積分の総和である．

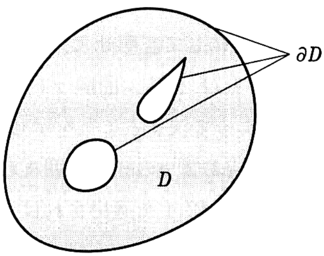


図 12.1 ストークスの定理

ストークスの定理を用いると，次を示すことができる（節末問題の **4**）．

定理 12.2（**ポアンカレ**[6] **の補題**） $\boldsymbol{R}^2$ 上の単連結[7] な領域 D 上で定義された 1 次微分形式 α が $d\alpha = 0$ をみたすならば $\alpha = df$ となる D 上の C^∞ 級関数 f が存在する．

問 題 12

1. 式 (12.1) と (12.2) から (12.3) を導け．

2. 局所座標系（$U; (u, v)$）上で，リーマン計量が $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv +$

6） Poincaré, Henri (1854 - 1912).

7） たとえば [11] の第 3 章を参照せよ．

$G\,dv^2$ と表されているものとする．ベクトル場 $\{\partial/\partial u, \partial/\partial v\}$ にグラム・シュミットの直交化をほどこして得られる U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u} - \sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

で表されることを示せ．

3. 問題 **2** において，さらに

$$\omega_1 = \sqrt{E}\left(du + \frac{F}{E}dv\right), \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,dv$$

とおくと，$\{\omega_1, \omega_2\}$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の**双対基底の場**となる，すなわち $\omega_j(\boldsymbol{e}_k) = \delta_{jk}$（クロネッカーのデルタ）をみたすことを示し，さらに $ds^2 = {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2$ が成り立つことを直接確かめよ．

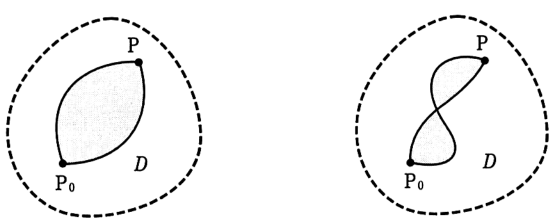
4. ポアンカレの補題（定理 12.2）を次のようにして証明せよ．

（1） D 上に定点 P_0 をとり，P_0 と $\mathrm{P} \in D$ を結ぶ曲線 γ に関する α の線積分は，曲線 γ の取り方によらず P のみによって決まることを示せ．
（ヒント： 下図の左のように，P_0 と P を結ぶ 2 つの経路で囲まれる領域がある場合は，その領域に関してストークスの定理 12.1 を適用すればよい．下図の右のような場合は，いくつかの領域に分けてストークスの定理を適用する．）

（2） 上でとった線積分を

$$f(\mathrm{P}) := \int_\gamma \alpha = \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \alpha$$

とすると，f は P の微分可能な関数で，$df = \alpha$ をみたすことを示せ．



§ 13. ガウス・ボンネの定理(多様体の場合)

曲線論では，助変数を弧長にとることが重要な役割を果たした．曲面においても，正規直交基底の場をとることによって，議論の見通しをよくすることができる．本節では，この立場から§10で述べたガウス・ボンネの定理の別証明と，そのベクトル場の指数公式への応用を与える．

2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の[1]座標近傍 U 上に定義された正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，双対基底の場を $\{\omega_1, \omega_2\}$ とすると，リーマン計量は

(13.1)
$$ds^2 = {\omega_1}^2 + {\omega_2}^2$$

と表される(問題12の**3**)．ω_1, ω_2 の外微分は2次微分形式であるから，$a, b \in C^\infty(U)$ が存在して

$$d\omega_1 = a(\omega_1 \wedge \omega_2), \qquad d\omega_2 = b(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

と書けるので，これを用いて

(13.2)
$$\mu = -a\omega_1 - b\omega_2$$

と定める．この U 上の1次微分形式 μ を，S の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する**接続形式**とよぶ[2]．

補題 13.1 2次元リーマン多様体の座標近傍 U 上の接続形式 μ は

(13.3)
$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \mu, \qquad d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \mu$$

をみたす．逆に，U 上の1次微分形式 μ が (13.3) をみたすならば，それは接続形式と一致する．

---

1) ここでは S のコンパクト性は仮定しない．

2) 通常は，交代行列に値をもつ微分形式 $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$ を接続形式とよぶのだが，ここでは，μ そのものを接続形式とよぶことにする．

［証明］ 接続形式が上の関係式をみたすことは，定義からただちにしたがう．逆に 1 次微分形式 μ が (13.3) をみたしているとすると μ が ω_1, ω_2 の一次結合で表されることから (13.2) がしたがう．　□

接続形式 μ の定義は，正規直交基底の場 $\{e_1, e_2\}$ の取り方に依存する．いま，$\{e_1, e_2\}$ の定義域と同じ U 上で定義された同じ向きの別の正規直交基底の場 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ に対して，対応する双対基底の場と接続形式を各々 $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$, $\tilde{\mu}$ とする．すると，$\theta \in C^\infty(U)$ が存在して，各点ごとに § 12 の (12.5) 式が成り立つ．

補題 13.2　接続形式 $\tilde{\mu}$ は，μ と上に述べた θ を用いて $\tilde{\mu} = \mu - d\theta$ と表される．

［証明］ 式 (12.5) より，

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\omega}_1 &= d(\cos\theta\,\omega_1 + \sin\theta\,\omega_2) \\
&= (-\sin\theta\,d\theta \wedge \omega_1 + \cos\theta\,d\omega_1) + (\cos\theta\,d\theta \wedge \omega_2 + \sin\theta\,d\omega_2) \\
&= -\sin\theta\,(d\theta \wedge \omega_1) + \cos\theta\,(\omega_2 \wedge \mu) + \cos\theta\,(d\theta \wedge \omega_2) + \sin\theta\,(-\omega_1 \wedge \mu) \\
&= d\theta \wedge (-\sin\theta\,\omega_1 + \cos\theta\,\omega_2) + (\cos\theta\,\omega_2 - \sin\theta\,\omega_1) \wedge \mu \\
&= d\theta \wedge \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_2 \wedge \mu = \tilde{\omega}_2 \wedge (-d\theta + \mu)
\end{aligned}
$$

を得る．同様の計算で $d\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\omega}_1 \wedge (-d\theta + \mu)$ が成り立つことがわかるので，補題 13.1 により $\tilde{\mu} = -d\theta + \mu$ となる．　□

正規直交基底の場 $\{e_1, e_2\}$ に関する接続形式を用いて，

$$
(13.4) \qquad \nabla_X e_1 = -\mu(X)\,e_2, \qquad \nabla_X e_2 = \mu(X)\,e_1 \qquad (X \in \mathfrak{X}^\infty(U))
$$

で定義される座標近傍 U 上のベクトル場 $\nabla_X e_1, \nabla_X e_2$ をそれぞれ e_1, e_2 の X 方向の**レビ・チビタの共変微分**[3] という．さらに U 上の任意のベクトル場 Y を $Y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$ と表すとき，

$$
(13.5) \qquad \nabla_X Y = \eta_1 \nabla_X e_1 + d\eta_1(X)\,e_1 + \eta_2 \nabla_X e_2 + d\eta_2(X)\,e_2
$$

3） Levi-Civita, Tullio (1873 - 1941).

によって定義されるベクトル場 $\nabla_X Y$ を Y の X 方向のレビ・チビタ共変微分という．これは，正規直交基底の場の取り方によらないことがわかる（節末問題の **1**）．よって，S 上の 2 つのベクトル場 X, Y に対して $\nabla_X Y$ を定義することができる．さらに任意のベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ と関数 $f \in C^\infty(S)$ に対して

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z\,, \tag{13.6}$$

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + df(X)\,Y\,, \tag{13.7}$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z\,, \tag{13.8}$$

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \tag{13.9}$$

が成り立つ．一般に，$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ に対して $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ を対応させる写像 ∇ が，上の性質 (13.6)-(13.9) をみたすとき，∇ を S 上の**共変微分**または**線形接続**という．

定理 13.3 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) 上のレビ・チビタ共変微分 ∇ は，さらに次をみたす：

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,, \tag{13.10}$$

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\,. \tag{13.11}$$

ここで $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\infty(S)$，$\langle\ ,\ \rangle$ はリーマン計量 ds^2 から定まる接空間の内積である．逆にこれら 2 つの性質をもつ S 上の共変微分はレビ・チビタ共変微分 ∇ に一致する．

［**証明**］ S の局所座標近傍 U を任意にとり，U 上のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$
$$Q(X, Y, Z) := Z\langle X, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

とおく．すると関数 $f, g, h \in C^\infty(U)$ に対して

$$T(fX, gY) = fg\,T(X, Y), \qquad Q(fX, gY, hZ) = fgh\,Q(X, Y, Z)$$

が成り立つことがわかるので，X, Y が e_1, e_2 の場合に T, Q がともに 0 であることを確かめればよい．まず，(13.4) より，$Q(e_j, e_k, Z) = 0$ （$j, k = 1, 2$）を得るから，(13.11) が示せた．次に (13.4) から

$$\begin{aligned} T(e_1, e_2) &= \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 - [e_1, e_2] \\ &= \mu(e_1)\, e_1 - \mu(e_2)\, e_2 - [e_1, e_2] \end{aligned}$$

となるので，(12.3)，(12.1) と補題 13.1 より

$$\begin{aligned} \omega_1(T(e_1, e_2)) &= \omega_1(\mu(e_1)\, e_1 - \mu(e_2)\, e_2 - [e_1, e_2]) = \mu(e_1) - \omega_1([e_1, e_2]) \\ &= \mu(e_1) + d\omega_1(e_1, e_2) - e_1(\omega_1(e_2)) + e_2(\omega_1(e_1)) \\ &= \mu(e_1) + d\omega_1(e_1, e_2) \\ &= \mu(e_1) + \omega_2 \wedge \mu(e_1, e_2) \\ &= \mu(e_1) - \omega_2(e_2)\, \mu(e_1) = 0 \end{aligned}$$

を得る．同様に $\omega_2(T(e_1, e_2)) = 0$ もわかるので，$T(e_1, e_2) = 0$ となる．また，$T(e_2, e_1) = -T(e_1, e_2) = 0$ であるから，$T = 0$ となり (13.10) も成り立つ．

逆に，共変微分 D が (13.10)，(13.11) をみたすならば，D がレビ・チビタ共変微分 ∇ に一致することを示そう．U 上のベクトル場 X, Y に対して

$$A_X Y := D_X Y - \nabla_X Y$$

とおく．D, ∇ がともに共変微分であることから $A_{fX}(gY) = fgA_X(Y)$ （$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$，$f, g \in C^\infty(U)$）であることがわかる．したがって $A_{e_i} e_j = 0$ （$i, j = 1, 2$）を示せば $D = \nabla$ であることがわかる．いま，D, ∇ がともに (13.10) をみたすことから

$$A_X Y = A_Y X \tag{13.12}$$

が成り立つ．また D, ∇ がともに (13.10) をみたすことから

$$\langle A_X e_1, e_1 \rangle = \langle A_X e_2, e_2 \rangle = 0, \tag{13.13}$$

$$\langle A_X e_1, e_2 \rangle = -\langle e_1, A_X e_2 \rangle \tag{13.14}$$

となる．とくに (13.13) より

$$\langle A_{e_j} e_1, e_1 \rangle = \langle A_{e_j} e_2, e_2 \rangle = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

が成り立つ．この式と (13.12) より $\langle A_{e_2} e_1, e_1 \rangle = \langle A_{e_1} e_2, e_2 \rangle = 0$，また (13.14) より

$$\langle A_{e_1} e_1, e_2 \rangle = -\langle e_1, A_{e_1} e_2 \rangle = -\langle e_1, A_{e_2} e_1 \rangle = 0$$

となる．以上より $\langle A_{e_1} e_i, e_j \rangle = 0$ （$i, j = 1, 2$）が示された．したがって $A_{e_1} e_i = 0$ （$i = 1, 2$）．同様に $A_{e_2} e_i = 0$ （$i = 1, 2$）がわかるので $A = 0$ となり $D = \nabla$ が示された． □

次に，接続形式 μ の外微分を考える．

$$d\mu = K\,\omega_1 \wedge \omega_2$$

によって座標近傍 U 上の関数 K を定める．この関数 K は，正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の取り方によらない．このことは，別の同じ向きの正規直交基底の場をとったときは，補題 13.2 より容易に示せる．向きが異なる場合は節末問題 **1** の (1) を用いればよい．したがって，S のすべての点 P で一意的に K の値 K_{P} が定まる．この値 K_{P} を P における**ガウス曲率**という．とくに，S が $\boldsymbol{R}^3$ の曲面のときには，これは曲面のガウス曲率と同じものである (節末問題の **4** 参照)．

多様体 S 上のなめらかな曲線 $\gamma : [a, b] \to S$ に対して，その速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は S の $\gamma(t)$ における接ベクトルである．さらに，曲線 $\gamma(t)$ の加速度ベクトルとして，レビ・チビタ共変微分 $\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}$ を考えることにする．正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて $\dot{\gamma} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2$ と表されていると，

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma} &= \dot{\xi}_1\boldsymbol{e}_1 + \dot{\xi}_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_1\nabla_{\dot{\gamma}}\,\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\nabla_{\dot{\gamma}}\,\boldsymbol{e}_2 \\ &= (\dot{\xi}_1 + \mu(\dot{\gamma})\,\xi_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (\dot{\xi}_2 - \mu(\dot{\gamma})\,\xi_1)\,\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

である[4]．加速度ベクトル $\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}$ が恒等的に 0 となるような曲線 $\gamma(t)$ をリーマン多様体 (S, ds^2) 上の**測地線**という．

$$\begin{aligned}(13.15)\qquad \langle \nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle &= \xi_1(\dot{\xi}_1 + \mu(\dot{\gamma})\,\xi_2) + \xi_2(\dot{\xi}_2 - \mu(\dot{\gamma})\,\xi_1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}|^2\end{aligned}$$

となるので，測地線の速度ベクトル $\dot{\gamma}$ の大きさは一定である．

測地線は，平面上の直線に対応するリーマン多様体上の概念である．平面上では直線は「 曲率が 0 である曲線 」として特徴づけられたが，多様体上で

---

4) $\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}$ は $\dot{\gamma}$ が多様体 S 上で定義されたベクトル場ではないので，このままでは意味をなさない．そこで曲線 γ 上に制限すれば $\dot{\gamma}$ と一致するようなベクトル場 X の共変微分を $\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}$ と解釈する．このように解釈すると上の式が成り立つが，右辺は X の取り方によらないので，右辺によって $\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}$ が定義されていると考えてもよい．

も曲線の曲率にあたる量を定義することで測地線を特徴づけよう．いま，S は向きづけられているとして，座標近傍 U 上の正の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとる．ここで，弧長 s をパラメータとする曲線 $\gamma : [a, b] \to U$ を考え，$\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1(\gamma(s))$ とのなす角を $\varphi(s)$ とする[5)]と，

$$\gamma'(s) = \xi_1(s)\,\boldsymbol{e}_1(s) + \xi_2(s)\,\boldsymbol{e}_2(s) \tag{13.16}$$

$$(\,\boldsymbol{e}_2(s) = \boldsymbol{e}_2(\gamma(s)),\ \ \xi_1(s) = \cos\varphi(s),\ \ \xi_2(s) = \sin\varphi(s)\,)$$

と書ける．とくに，

$$\xi_1\xi_2' - \xi_2\xi_1' = \cos\varphi\,(\sin\varphi)' - \sin\varphi\,(\cos\varphi)' = \varphi' \tag{13.17}$$

が成り立つことがわかる．この曲線の左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_g(s)$ は

$$\boldsymbol{n}_g(s) = -\xi_2(s)\,\boldsymbol{e}_1(s) + \xi_1(s)\,\boldsymbol{e}_2(s) \tag{13.18}$$

と書くことができる．一方，

$$\boldsymbol{\kappa}_g = \nabla_{\gamma'}\gamma' = (\xi_1' + \mu(\gamma')\,\xi_2)\,\boldsymbol{e}_1 + (\xi_2' - \mu(\gamma')\,\xi_1)\,\boldsymbol{e}_2$$

で定まるベクトル $\boldsymbol{\kappa}_g$ を γ の**測地的曲率ベクトル**という．(13.15) より，$\boldsymbol{\kappa}_g$ は γ' に直交するので，$\boldsymbol{n}_g$ のスカラー倍で書くことができる： $\boldsymbol{\kappa}_g = \kappa_g\boldsymbol{n}_g$．この係数 κ_g を**測地的曲率**とよぶ．すなわち，

$$\kappa_g = \langle \boldsymbol{\kappa}_g, \boldsymbol{n}_g \rangle \tag{13.19}$$

である．これらは S が $\boldsymbol{R}^3$ の曲面の場合の測地的曲率ベクトル，測地的曲率に一致する．一般に，弧長とは限らないパラメータで表示された曲線の測地的曲率は，助変数を弧長に取り直して求めた測地的曲率と定義する．この定義により，測地的曲率はパラメータの取り方によらない概念となる．

測地線 $\gamma(t)$ に対して $c := |\dot\gamma|$ は一定だから

$$\boldsymbol{\kappa}_g = \nabla_{\frac{1}{c}\dot\gamma}\frac{1}{c}\,\dot\gamma = \frac{1}{c^2}\nabla_{\dot\gamma}\,\dot\gamma = 0$$

となり，測地的曲率が 0 となることがわかる．逆に測地的曲率が 0 である曲線は測地線とは限らないが，パラメータを弧長に比例するように取り直せば，測地線となる．

5）厳密には $\boldsymbol{e}_1$ から正の方向に測った γ' とのなす角．§3 で平面曲線の回転角 θ を定義したように，φ は区間 $[0, 2\pi)$ を越えて s について連続になるようにしておく．

式 (13.17), (13.18), (13.19) より,

$$\kappa_g\,ds = \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 - \mu = d\varphi - \mu \qquad (13.20)$$

が成り立つ．これを用いて(測地三角形とは限らない)三角形に関する**ガウス・ボンネの定理**を示そう．

命題 13.4　向きづけられた2次元リーマン多様体 (S, ds^2) 上の座標近傍 $(U; (u, v))$ 上のなめらかな3つの曲線 γ_j $(j = 1, 2, 3)$ によって囲まれた単連結な三角形領域 D の内角を $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}$ とする(図 13.1 左)と,

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s)\, ds + \int_D K\, dA = \pi - (\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31})$$

が成り立つ．ここで，左辺第1項の積分は，三角形の各辺の測地的曲率を，領域を左側に見るような向きで積分したものを表す．

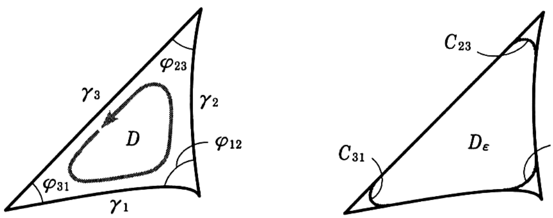


図 13.1

[**証明**]　領域 D の角(かど)を(C^∞ 級の意味で)丸めた領域を D_ε とし，$\varepsilon \to 0$ のとき，D_ε は D になるとする．このとき，D_ε の境界のうち，元の三角形の辺 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ と一致する部分をそれぞれ $\gamma_{1,\varepsilon}, \gamma_{2,\varepsilon}, \gamma_{3,\varepsilon}$，角を丸めた部分の曲線を C_{12}, C_{23}, C_{31} としておく(図 13.1 右)．まず，ストークスの定理(定理 12.1)と (13.20) より

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_\varepsilon} \kappa_g(s)\, ds + \int_{D_\varepsilon} K\, dA &= \int_{\partial D_\varepsilon} \kappa_g(s)\, ds + \int_D K\, d\hat{A} = \int_{\partial D_\varepsilon} \kappa_g(s)\, ds + \int_{D_\varepsilon} d\mu \\ &= \int_{\partial D_\varepsilon} \kappa_g(s)\, ds + \int_{\partial D_\varepsilon} \mu = \int_{\partial D_\varepsilon} d\varphi\end{aligned}$$

であるが，∂D_ε は，領域を左手に見るなめらかな閉曲線だから，$\int_{\partial D_\varepsilon} d\varphi$ は 2π の整数倍である．いま，リーマン計量の変形

$$ds_t{}^2 := (1-t)\,ds^2 + t\,(du^2 + dv^2) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

を考えると，この計量の変形に関して積分 $\int_{\partial D_\varepsilon} d\varphi$ は値を変えないが，とくに

$ds_1{}^2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の標準的な計量であるから，この値は，単純閉曲線の回転数の 2π 倍にほかならない．よって，§3 の定理 3.2 より $\int_{\partial D_\varepsilon} d\varphi = 2\pi$ となることがわかり，

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \kappa_g(s)\, ds + \int_{D_\varepsilon} K\, dA = 2\pi$$

が示せた．ここで，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} K\, dA = \int_D K\, dA, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{j,\varepsilon}} \kappa_g(s)\, ds = \int_{\gamma_j} \kappa_g(s)\, ds,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{jk}} \kappa_g(s)\, ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{jk}} d\varphi - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{jk}} \mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{jk}} d\varphi = \varphi_{jk}$$

なので主張を得る．　□

この結果を用いれば，次の**大域的なガウス・ボンネの定理**が証明できる．

定理 13.5　向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) 上の有界領域 D の境界 ∂D は空集合であるか，領域を左手に見るいくつかのなめらかな閉曲線で囲まれているとする．このとき，D の境界の測地的曲率を κ_g と書くと，

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s)\, ds + \int_D K\, dA = 2\pi\chi(D)$$

が成り立つ．ただし，$\chi(D)$ は領域 D のオイラー数である(図 13.2)．とくに S がコンパクトのときには

$$\int_S K\, dA = 2\pi\chi(S) \tag{13.21}$$

が成り立つ[6]．

6）　S が $\boldsymbol{R}^3$ の曲面の場合には，これは §10 であげた定理 10.7 である．さらに，S がコンパクトで向きづけ不可能な場合にも (13.21) が成り立つ．実際，S の 2 重被覆 $\hat{S}$ を考えると，射影 $p: \hat{S}\to S$ がはめ込みになる([8] の 236 ページ参照)．そこで，S のリーマン計量の p による $\hat{S}$ への引き戻しを考えると，$\hat{S}$ もリーマン多様体となり，そのガウス曲率 $\hat{K}$ について

$$4\pi\chi(S) = 2\pi\chi(\hat{S}) = \int_{\hat{S}} \hat{K}\, dA = 2\int_S K\, dA$$

が成り立つ．

[証明]　Dをなめらかな辺をもつm個の三角形に分割し，それらの三角形の頂点が∂D上にn_1個，Dの内部にn_2個，また，辺が∂D上にl_1個，Dの内部にl_2個あるとする．各々の三角形に命題13.4を適用し総和をとると，隣り合う三角形で共有する辺の向きが反対なので，κ_gの積分は境界上のもののみが残る．また，∂D上の頂点に集まる三角形の内角の和はπ，Dの内部の頂点に集まる内角の和は2πであるから

$$\int_{\partial D} \kappa_g\, ds + \int_D K\, dA = \pi n_1 + 2\pi n_2 - \pi m .$$

ここで，1つの三角形は3つの辺をもち，Dの内部の辺は2つの三角形に共有されるので$l_1 + 2l_2 = 3m$，また$n_1 = l_1$が成り立つから

$$\begin{aligned}\pi n_1 + 2\pi n_2 - \pi m &= 2\pi(n_1 + n_2) - \pi n_1 - 3\pi m + 2\pi m \\ &= 2\pi\{(n_1 + n_2) - (l_1 + l_2) + m\} \\ &= 2\pi\chi(D)\end{aligned}$$

となり結論を得る．　□

命題13.4のもう一つの応用として，コンパクトで向きづけ可能な2次元多様体Sのベクトル場の指数公式を示そう．

XをS上の有限個の点$\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$を除いたところで定義されたベクトル場で，これらの点以外では0にならないものとする．いま，P_j（$j = 1, \cdots, n$）を1つとると，P_jを含む座標近傍U_jで$\{\mathrm{P}_k \mid k \neq j\}$の点を含まないものが存在する．さらに$U_j$は単連結，すなわち$\boldsymbol{R}^2$の円板と同相な領域であるとしてよい．このとき$\boldsymbol{e}_1 := X/|X|$（ただし$|X|$は$X$の大きさ）は$U_j \backslash \{\mathrm{P}_j\}$で定義された単位ベクトルの場だから，もう一つ単位ベクトルの場$\boldsymbol{e}_2$を$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$が$U_j \backslash \{\mathrm{P}_j\}$上の正に向きづけられた正規直交基底の場となるようにとることができる．

いま，U_j内の単純閉曲線$\gamma(s)$（$0 \leqq s \leqq l$）でP_jを内部に含むものをとる．ただし，sは弧長パラメータ，よって$\gamma'(s)$は単位ベクトルである．そこで$\gamma'(s)$から測った$\boldsymbol{e}_1$とのなす角を$\psi_j(s)$とおく[7]．すると$\gamma'(0) =$

7）　このψ_jは(13.16)で定義したφの符号を逆にしたものである．φの定義と同様に，$[0, 2\pi)$を越えて$\psi_j(s)$が連続になるように定義しておく．

$\gamma'(l)$ であるから，$\phi_j(0)$ と $\phi_j(l)$ は 2π の整数倍でしか違わない．したがって，この差は曲線 γ を連続的に変形しても変化しない．そこで

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} X := 1 + \frac{1}{2\pi}\{\phi_j(l) - \phi_j(0)\} \tag{13.22}$$

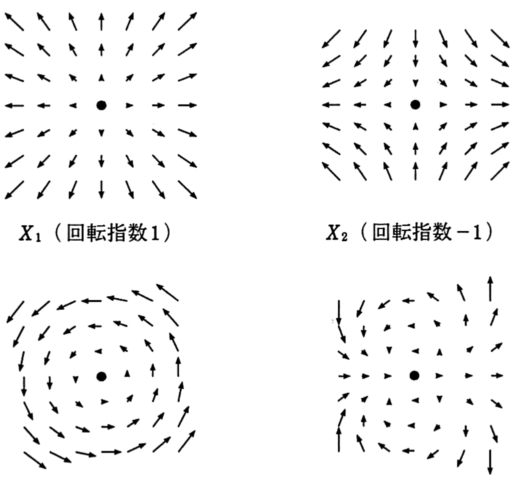
で定まる整数をベクトル場 X の P_j における**回転指数**という．これは，P_j のまわりを1周する間に単位ベクトル $X/|X|$ が「何回回転したか」を表している．定義式 (13.22) で1を加えるのは，曲線 $\gamma(s)$ 自体が1回転するので，その分を補正するためである．

たとえば $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル場

$$X_1 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_3 = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_4 = (u^2 - v^2)\frac{\partial}{\partial u} - 2uv\frac{\partial}{\partial v}$$

の原点における回転指数は，それぞれ $1, -1, 1, 2$ となる(図13.2)．



X_1（回転指数1）　X_2（回転指数-1）

X_3（回転指数1）　X_4（回転指数2）

図13.2　ベクトル場の回転指数

ベクトル場の指数の総和について次の公式が知られている.

定理 13.6（**ポアンカレ・ホップ**[8]**の指数定理**）　コンパクトで向きづけられた 2 次元多様体 S 上の有限個の点 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ を除いたところで定義された 0 にならないようなベクトル場 X に対して

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} X = \chi(S)$$

が成り立つ.

［**証明**］ よく知られるように, S 上にはリーマン計量 ds^2 が存在する. 各点 P_j のまわりに半径 ε の左まわりの測地円 $C_j(\varepsilon)$ を描き, S から $C_j(\varepsilon)$ （$j=1, \cdots, n$）が囲む円板を除いた領域を D_ε とする. このとき, 各 P_j のまわりで回転指数の定義 (13.22) で述べた $C_j(\varepsilon)$ 上の関数 ψ_j をとる. すると, 曲線 $C_j(\varepsilon)$ に対して (13.16) のように定義された φ は $-\psi_j$ に一致するから, (13.20) より曲線の測地的曲率は $\kappa_g\, ds = -d\psi_j - \mu$ をみたす.

定理 13.5 とストークスの定理 12.1 より

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(S) &= \int_S K\, dA = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} K\, dA = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon}\mu \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)}\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)}(\kappa_g\, ds + d\psi_j) \\ &= 2\pi n + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)} d\psi_j \end{aligned}$$

となる. ところが右辺の各積分は, $C_j(\varepsilon)$ を左向きにひと回りしたときの角度 ψ_j の変化であるから $2\pi(\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} X - 1)$ となる. 以上より結論が示された. □

$\boldsymbol{R}^3$ の曲面のときの解釈　一般に, 多様体 S から多様体 M への C^∞ 級写像 p の微分写像 $(dp)_\mathrm{P}: T_\mathrm{P}S \to T_{p(\mathrm{P})}M$ の階数が, S の各点 P において S の次元に等しいとき, f を S から M への**はめ込み**という. とくに $M = \boldsymbol{R}^3$, S を 2 次元多様体とするとき, S の局所座標系 (u, v) をとれば, この条件は $p_u \times p_v \neq 0$ となることと同値である. したがって, 第II章で扱った曲面の助変数表示は, 2 次元多様体 S から $\boldsymbol{R}^3$ への（自己交叉をもたな

8） Hopf, Heinz (1894 - 1971).

い)はめ込みを S の局所座標系 (u, v) で表したものにほかならない.

いま,2次元多様体 S から $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $p=(x, y, z): S \to \boldsymbol{R}^3$ が与えられたとする.このとき,S 上の点 P における接ベクトル X に対して

$$\hat{X} := dp(X) = (dx(X), dy(X), dz(X))$$

と $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを定めると,これは曲面 $p(S)$ 上の点 $p(\mathrm{P})$ における接ベクトルを与えている.p がはめ込みであることから,この対応 $X \mapsto \hat{X}$ は S の P における接ベクトル全体(接空間)と曲面 $p(S)$ の $p(\mathrm{P})$ における接ベクトル全体の1対1対応を与えている.ここで $\hat{X}$ は S から $\boldsymbol{R}^3$ へのベクトル値関数であることを注意しておく.とくに外微分 $d\hat{X}$ を後で考えるが,これはベクトル値関数 $\hat{X}$ を3つの関数の組と考えて,それぞれに外微分をほどこしたものと解釈する.

はめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ による $\boldsymbol{R}^3$ の計量の引き戻し ds^2 は S 上のリーマン計量を与える.これを p の**第一基本形式**とよぶ.これは,第 II 章で与えた第一基本形式と一致する.実際,定義から,任意の接ベクトル X, Y に対して

$$\langle X, Y \rangle = \hat{X} \cdot \hat{Y} = dp(X) \cdot dp(Y) \tag{13.23}$$

が成り立つ.ここで,"・"は $\boldsymbol{R}^3$ の内積である.すなわち,$ds^2 = dp \cdot dp$ となるので,これは §7 の (7.8) と一致する.

さらに,$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ に対して $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ を

$$\nabla_X Y := [d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}} = \text{ベクトル } d\hat{Y}(X) \text{ の曲面に接する方向の成分}$$
$$= d\hat{Y}(X) - (d\hat{Y}(X) \cdot \nu)\nu \qquad (\nu \text{ は単位法線ベクトル})$$

で定義すると,∇ は第一基本形式から定まるレビ・チビタ共変微分となる.このことを示そう.まず,$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S)$ と $f \in C^\infty(S)$ に対して

$$\nabla_{fX} Y = [d\hat{Y}(fX)]^{\mathrm{T}} = [f\, d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}} = f[d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}} = f \nabla_X Y,$$
$$\nabla_X fY = [d\widehat{fY}(X)]^{\mathrm{T}} = [d(f\hat{Y})(X)]^{\mathrm{T}} = [df(X)\,\hat{Y} + f\, d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}}$$
$$= df(X)\,\hat{Y} + f[d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}} = df(X)\,Y + f\nabla_X Y$$

が成り立つので ∇ は (13.7), (13.9) をみたし,さらに (13.6), (13.8) も容易に確かめられるから,∇ は共変微分となることがわかる.また,第一基本

形式の定義から

$$X\langle Y,Z\rangle = X(\hat{Y}\cdot\hat{Z}) = d\hat{Y}(X)\cdot\hat{Z} + \hat{Y}\cdot d\hat{Z}(X)$$
$$= [d\hat{Y}(X)]^{\mathrm{T}}\cdot\hat{Z} + \hat{Y}\cdot[d\hat{Z}(X)]^{\mathrm{T}} = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

が成り立つ. ここで $\hat{Y}, \hat{Z}$ が曲面に接するベクトルであることを用いた. したがって ∇ は (13.11) をみたすことがわかる.

以上より ∇ が (13.10) をみたすことが示されれば, 定理 13.3 より, これがレビ・チビタ共変微分であることがわかる. 実際, S の局所座標系 (u, v) に対して

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \left[d\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial v}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]^{\mathrm{T}} = \left[d\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}\right]^{\mathrm{T}}$$

が成り立つから, 定理 13.3 の証明で定義した T は

$$T\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \left[\frac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial^2 p}{\partial v\partial u}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\widehat{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}}\right] = 0$$

をみたす. また, $T(fX, Y) = T(X, fY) = fT(X, Y)$ が成り立ち, さらに $T(X, Y) = -T(Y, X)$ であるから, $T = 0$ となり, (13.10) が成り立つ.

問 題 13

1. 次を示すことにより, レビ・チビタ共変微分 $\nabla_X Y$ の定義が正規直交基底の場の取り方によらないことを示せ.

(1) 正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式を μ とするとき, $\{\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式は $-\mu$ であることを示せ.

(2) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ と同じ向きの正規直交基底の場 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に関する接続形式を $\tilde{\mu}$ とする. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の接続形式 μ によって (13.4), (13.5) のように $\nabla_X Y$ を定義するとき,

$$(*)\qquad \nabla_X \tilde{\boldsymbol{e}}_1 = -\tilde{\mu}(X)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \nabla_X \tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \tilde{\mu}(X)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_1$$

を示せ.

(3) $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ が $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ と異なる向きの正規直交基底の場のときも (∗) が成り立つことを (1), (2) を用いて示せ.

2. $\boldsymbol{R}^3$ にはめ込まれた曲面 S の第一基本形式を ds^2 とし，座標近傍 U 上で定義された正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとると，これに付随する接続形式 μ は

$$\mu(X) = d\hat{\boldsymbol{e}}_2(X)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1 = -d\hat{\boldsymbol{e}}_1(X)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_2 \qquad (X\in\mathfrak{X}^\infty(U))$$

をみたすことを示せ．

3. 2次元多様体 S のリーマン計量 ds^2 を，局所座標系 (u, v) を用いて

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

と表示しておく．この E, F, G に対して §10 の (10.4) 式(96ページ)によって $\Gamma_j{}^m{}_k$ を定義して，これを**クリストッフェルの記号**とよぶことにする．このとき S のレビ・チビタ共変微分を ∇ とすると

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = \Gamma_1{}^1{}_1\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1{}^2{}_1\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_1{}^1{}_2\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_1{}^2{}_2\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u} = \Gamma_2{}^1{}_1\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_2{}^2{}_1\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v} = \Gamma_2{}^1{}_2\frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_2{}^2{}_2\frac{\partial}{\partial v}$$

が成り立つことを示せ．

4. 2次元多様体 S 上のリーマン計量 ds^2 を測地的極座標 (r, θ) によって

$$ds^2 = dr^2 + h^2\,d\theta^2 \qquad (h = h(r, \theta))$$

と表示しておく．ただし $h(r, \theta)$ は正の値をとる関数である．このとき，本節で定義したガウス曲率は $K = -h_{rr}/h$ と表されることを示せ．とくに曲面のときは，§11 の (11.8) より，K は §8 で定義したガウス曲率に一致する．

§ 14. ラプラシアンと等温座標系

ラプラシアン　ここでは (S, ds^2) は向きづけられたコンパクト2次元リーマン多様体とする．S 上の局所的な正の正規直交基底の場 $\{e_1, e_2\}$ に対して，その双対基底の場 $\{\omega_1, \omega_2\}$ をとっておく．§12 で述べた微分形式の空間 $\mathcal{A}^1(S)$ に対して線形作用素 $*: \mathcal{A}^1(S) \to \mathcal{A}^1(S)$ を，

$$*\omega_1 = \omega_2, \qquad *\omega_2 = -\omega_1$$

かつ $*(f\omega) = f*\omega$ （$\omega \in \mathcal{A}^1(S)$，$f \in C^\infty(S)$）となるように定義する．基底変換の公式 (12.5) より，これは正規直交基底の場によらない．この写像を **$*$ 作用素**（ホッジ[1]のスター作用素）とよぶ．とくに $*\circ* = -1$ が成り立つ．

ここで $f \in C^\infty(S)$ に対して2次微分形式 $d*df$ を考えると，これは §12 で定義した面積要素 $d\hat{A}$ に比例するから

$$d*df = (\Delta f)\, d\hat{A}$$

によって関数 Δf が定まる．この線形写像 $\Delta: C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ を**ラプラシアン**という．（$-\Delta$ をラプラシアンとする本もあるので注意されたい．）

定理 14.1　向きづけられたコンパクトかつ連結なリーマン多様体 S 上の関数 $f \in C^\infty(S)$ が

$$\int_S f\, dA = 0$$

をみたすならば，$f = \Delta g$ となる $g \in C^\infty(S)$ が存在する．

この定理を証明するにはホッジ・ドラム[2]の分解定理を用いる．たとえば [13] の Chapter 6 を参照されたい．[20] の2巻 第4章にはホッジ・ドラムの定理の証明の概略と応用についての解説がある．

1）　Hodge, Sir William Vallance Douglas (1903 - 1975).

2）　de Rham, George William (1903 - 1990).

等温座標系　2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の局所座標系 $(U; (u, v))$ によってリーマン計量が

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (E = e^{2\sigma})$$

と表示されるとき，(u, v) を**等温座標系**とよぶ．

リーマン多様体 S と $\boldsymbol{R}$ の区間 I の直積 $I \times S$ 上で定義された関数 f に関する（微分）方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

を**熱伝導の方程式**という．ここで，Δ は S のリーマン計量に関するラプラシアンである．多様体上を熱が伝わっていく際に，時刻 t における点 P の温度を $f(t, \mathrm{P})$ とおけば，これが熱伝導の方程式をみたすと考えられる．とくに $\Delta f = 0$ をみたす関数 f は調和関数とよばれ，温度の定常状態を表している．

等温座標は**等温直交網**ともよばれる．それは，等温座標系では座標関数 u, v はともに調和関数となり，したがって u, v を温度を表す関数と思うと，u あるいは v が一定である曲線は互いに直交する温度分布の等温線になることによる．

2次元リーマン多様体上の任意の点に対して，その点を含む等温座標系が存在する．この事実を，[17] に紹介された方法で示す．まず，2つの補題を用意する．

補題 14.2　ガウス曲率が恒等的に0であるような2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の各点に対して，その点を含む局所座標系 $(U; (u, v))$ で

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

と表されるものが存在する．

この補題は，平坦（ガウス曲率が0）の2次元リーマン多様体が局所的には距離を保つ写像で，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合として実現できることを意味している．とくに $\boldsymbol{R}^3$ の平坦な線織面（可展面）の場合は付録 B-4 で別証を与える．

［**証明**］ この証明には S の向きづけ可能性は必要でない．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を S の単連結な座標近傍 U で定義された正規直交基底の場とし，$\{\omega_1, \omega_2\}$ をその双対基底の場とする．μ をこの基底に関する接続形式とすると，ガウス曲率が 0 であることから，$d\mu=0$ が成り立つ．ここで，U は単連結なので，ポアンカレの補題(定理12.2)より，U 上の C^∞ 級関数 θ が存在して $\mu=d\theta$ と書ける．いま，

$$(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2)=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

とおき，$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に関する接続形式を $\tilde{\mu}$ とすると，補題 13.2 より $\tilde{\mu}=\mu-d\theta=0$ となる．このとき，$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ の双対基底の場を $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ とすると，(13.2) より $d\tilde{\omega}_1=d\tilde{\omega}_2=0$ が成り立つ．したがって，ポアンカレの補題より，U 上の C^∞ 級関数 u, v が存在して

$$\tilde{\omega}_1=du, \qquad \tilde{\omega}_2=dv$$

をみたす．すると (13.1) より

$$ds^2=(\tilde{\omega}_1)^2+(\tilde{\omega}_2)^2=du^2+dv^2$$

であり，(u, v) が求める座標系であることがわかる． □

補題 14.3 向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) のガウス曲率を K とする．いま $\sigma\in C^\infty(S)$ によって S 上に新しいリーマン計量

$$d\tilde{s}^2 := e^{2\sigma}ds^2$$

を定義するとき，$d\tilde{s}^2$ のガウス曲率 $\tilde{K}$ は

$$e^{2\sigma}\tilde{K}=K-\Delta_{ds^2}\sigma$$

をみたす．ここで Δ_{ds^2} は ds^2 に関するラプラシアンである．

［**証明**］ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を S の座標近傍 U で定義された正の正規直交基底の場とし，$\{\omega_1, \omega_2\}$ をその双対基底の場とする．μ をこの基底に関する接続形式とする．いま，

$$\tilde{\omega}_1=e^\sigma\omega_1, \qquad \tilde{\omega}_2=e^\sigma\omega_2$$

とおくと，これが $d\tilde{s}^2$ に関する双対正規直交基底の場となる．すると (13.3) より

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\omega}_1 &= d(e^{\sigma}) \wedge \omega_1 + e^{\sigma}\, d\omega_1 \\
&= (de^{\sigma}(\boldsymbol{e}_1)\,\omega_1 + de^{\sigma}(\boldsymbol{e}_2)\,\omega_2) \wedge \omega_1 + e^{\sigma}(\omega_2 \wedge \mu) \\
&= de^{\sigma}(\boldsymbol{e}_2)\,\omega_2 \wedge \omega_1 + e^{\sigma}\,\omega_2 \wedge \mu \\
&= \frac{de^{\sigma}(\boldsymbol{e}_2)}{e^{\sigma}}\,\tilde{\omega}_2 \wedge \omega_1 + \tilde{\omega}_2 \wedge \mu \\
&= d\sigma(\boldsymbol{e}_2)\,\tilde{\omega}_2 \wedge \omega_1 + \tilde{\omega}_2 \wedge \mu = \tilde{\omega}_2 \wedge (d\sigma(\boldsymbol{e}_2)\,\omega_1 + \mu)
\end{aligned}
$$

となる．同様にして

$$d\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\omega}_1 \wedge (-d\sigma(\boldsymbol{e}_1)\,\omega_2 + \mu)$$

が示せるから，

$$\tilde{\mu} = d\sigma(\boldsymbol{e}_2)\,\omega_1 - d\sigma(\boldsymbol{e}_1)\,\omega_2 + \mu = -(*\,d\sigma) + \mu$$

が得られる．ただし，$*$ は計量 ds^2 に関する $*$作用素である．よって

$$
\begin{aligned}
e^{2\sigma}\tilde{K}\,\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{K}\,\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = d\tilde{\mu} &= -d * d\sigma + d\mu \\
&= (-\Delta_{ds^2}\sigma + K)\,\omega_1 \wedge \omega_2
\end{aligned}
$$

となり，結論を得る．　□

定理 14.4　（一般には向きづけ可能とは限らない）2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) 上の各点のまわりに等温座標系が存在する．

［**証明**］　まず，多様体 S 上の 1 点 P を任意に固定し，点 P のまわりの座標近傍 $(U; (u, v))$ をとる．U は uv 平面上の原点を中心とする半径 2 の円板 $B_0(2) \subset \boldsymbol{R}^2$ を含んでいるとしてよい．いま，C^{∞} 級関数 $\rho : B_0(2) \to [0, 1]$ で，原点を中心とする半径 1/2 の円板 $B_0(1/2)$ の上で値が恒等的に 1 であり，半径 1 の円板 $B_0(1)$ の外で値が 0 となるようなものをとる．すると，$B_0(2)$ 上の新しいリーマン計量

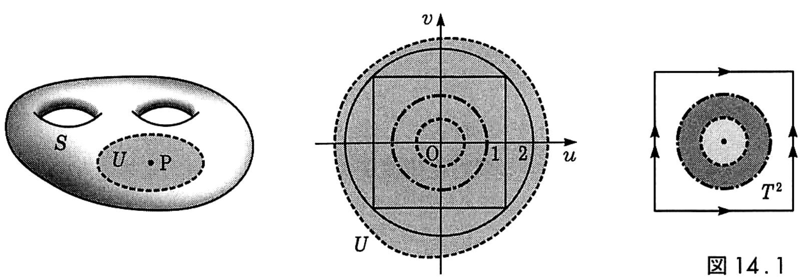


図 14.1

$$d\hat{s}^2 = \rho\, ds^2 + (1-\rho)(du^2 + dv^2)$$

は，$B_0(1/2)$ 上では元の計量 ds^2 に一致し，$B_0(1)$ の外では，ユークリッド計量 du^2+dv^2 に一致する．いま，$\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする半径 2 の円に内接する正方形の向かい合う辺を同一視して得られるトーラス T^2 を考えると，この計量 $d\hat{s}^2$ により T^2 はリーマン多様体とみなすことができる．ここで，$K_{d\hat{s}^2}$ を T^2 上の $d\hat{s}^2$ に関するガウス曲率とすると，ガウス・ボンネの定理 13.5 より

$$\int_{T^2} K_{d\hat{s}^2}\, dA_{d\hat{s}^2} = 0$$

が成り立つ．ここで，$dA_{d\hat{s}^2}$ は $d\hat{s}^2$ の面積要素である．よって $\Delta_{d\hat{s}^2}$ を計量 $d\hat{s}^2$ に関するラプラシアンとすると，定理 14.1 より $-K_{d\hat{s}^2} = \Delta_{d\hat{s}^2}\sigma$ となる関数 $\sigma \in C^\infty(T^2)$ が存在する．そこで，

$$d\tilde{s}^2 = e^{-2\sigma}\, d\hat{s}^2$$

によって T^2 上の新しい計量を定義すると，トーラスの向きづけ可能性と補題 14.3 により，$d\tilde{s}^2$ の曲率は恒等的に 0 となる．よって，原点の近傍 V で定義された座標系（$\tilde{u}, \tilde{v}$）が存在して $d\tilde{s}^2 = d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$ と表示される．すると $d\hat{s}^2 = e^{2\sigma}(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$ となるが，とくに，V と $B_0(1/2)$ の共通部分では $d\hat{s}^2 = ds^2$ なので，

$$ds^2 = d\hat{s}^2 = e^{2\sigma}(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)$$

となり，S 上で等温座標系（$\tilde{u}, \tilde{v}$）をとることができた． □

さらに S が向きづけ可能なとき，等温座標系の存在は S に複素構造を与える．すなわち，向きづけ可能な 2 次元リーマン多様体は自然に 1 次元複素多様体（リーマン面）の構造をもつ．

定理 14.5 向きづけられた 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の各点のまわりで，向きに同調する等温座標系（$U; (u, v)$）をとることができて，$z = u + iv$（$i = \sqrt{-1}$）は S に複素多様体の構造を与える．

［**証明**］ 定理 14.4 より，S の各点の近傍で等温座標系（$U; (u, v)$）をとることができる．必要なら，(u, v) を $(u, -v)$ に取り換えることによって，(u, v) は最初から向きに同調しているように取り直すことができる．この座標系によって，リーマン計量 ds^2 は $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ と表せる．ここで，（$V; (x, y)$）

を正に向きづけられた別の等温座標系として，$U \cap V$ が空集合でないとする．(x, y) もまた等温座標系であるから，リーマン計量は $ds^2 = \tilde{E}(dx^2 + dy^2)$ と表すことができる．

まず，2 つの座標系がともに正に向きづけられていることから

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u > 0 \tag{14.1}$$

とならなければならない．また，リーマン計量の座標不変性により，$U \cap V$ において

$$\begin{aligned} E(du^2 + dv^2) &= ds^2 = \tilde{E}(dx^2 + dy^2) \\ &= \tilde{E}((x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2) \\ &= \tilde{E}((x_u{}^2 + y_u{}^2) du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v) du dv + (x_v{}^2 + y_v{}^2) dv^2) \end{aligned}$$

となるが，この両辺を比較して

$$x_u{}^2 + y_u{}^2 = x_v{}^2 + y_v{}^2, \tag{14.2}$$

$$x_u x_v + y_u y_v = 0 \tag{14.3}$$

である．(14.3) より (x_u, y_u) と (x_v, y_v) は $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルとして直交するが，これらは零ベクトルにはなり得ないから，

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} y_v \\ -x_v \end{pmatrix}$$

をみたす関数 φ が存在する．これを (14.2) に代入すると，$\varphi = \pm 1$ を得るが，とくに (14.1) によって，$\varphi = 1$ となる．したがって，コーシー・リーマンの方程式

$$x_u = y_v, \qquad x_v = -y_u$$

を得る．これは，座標変換 $u + iv \longmapsto x + iy$ が複素変数の正則関数であることを示している．これによって，S に複素多様体の構造を入れることができた． □

問 題 14

1. $\boldsymbol{R}^2$ のリーマン計量 $ds^2 = du^2 + dv^2$ についてラプラシアンが

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

で与えられることを確かめよ．

2. 2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の等温座標系 (u, v) によってリーマン計量が $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ と表されているとき，ラプラシアンは

$$\Delta = e^{-2\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

で与えられることを示せ．さらに，補題14.3を適用することにより，ガウス曲率 K は

$$K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})$$

をみたすことを示せ．

3. 上半平面 $D := \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ 上にリーマン計量

$$ds_{\mathrm{H}}{}^2 := \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$$

を定める(§10のコラム(104ページ)参照)．このとき，

(1) $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ のガウス曲率は恒等的に -1 となることを示せ．

(2) D 上の v 軸に平行な直線は，弧長によるパラメータ表示をすれば測地線になることを示せ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ を複素平面と同一視して，$z = u + iv$ とおくとき，写像

$$f:\ D \ni z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \in D \qquad (a, b, c, d \in \boldsymbol{R}\,;\ ad - bc \neq 0)$$

による計量 $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ の引き戻しは，$ds_{\mathrm{H}}{}^2$ に一致することを示せ．(したがって，この写像は，$(D, ds_{\mathrm{H}}{}^2)$ の等長変換を与えている．)

(4) とくに $cd \neq 0$ のとき，上の変換により，v 軸に平行な直線は，u 軸に直角に交わる円に写ることを示せ．(したがって，u 軸に直交する円は，計量 $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ に関する測地線を与えている．)

(5) $z = u + iv$ とおくと，§10のコラム(104ページ)における距離の表示式は

$$d_{\mathrm{H}}(z, w) = \log\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

で与えられる．(3)の f に対して $d_{\mathrm{H}}(f(z), f(w)) = d_{\mathrm{H}}(z, w)$ が成り立つことを示せ．

(6) D 上の2点 z, w を結ぶ計量 $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ に関する測地線の長さは $d_{\mathrm{H}}(z, w)$ となることを確かめよ．

4. 問題 **3** の計量の v^2 を v に置き換え，上半平面 $D=\{(u,v)\mid v>0\}$ にリーマン計量

$$ds^2 := \frac{1}{v}(du^2+dv^2)$$

を定める[3]．

（1） リーマン計量 ds^2 に関する測地線は uv 平面の u 軸を基線とするサイクロイド（練習問題 1 の **4** 参照）または u 軸に垂直な半直線となることを示せ．とくに ds^2 に関する測地線は境界（u 軸）と直交する．

（2） D の境界 ∂D 上の点 P と D 内の点 Q に対して，直線 PQ は v 軸に平行でないとする．このとき，P, Q を結ぶサイクロイドで u 軸と直交するものがただ一つ存在することを示せ．

（3） D の異なる 2 点 P, Q に対して，P, Q を通る ds^2 に関する測地線がただ一つ存在することを示せ．

3） $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ と違い，この計量は D 上の完備な計量ではない．

§ 15. ガウス方程式とコダッチ方程式

2 次元多様体 S の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ を考える．すなわち，ここでは自己交叉を許す一般化された曲面を扱う．このとき，式 (13.23) によって，S 上にリーマン計量(第一基本形式) ds^2 が定義される．等温座標系 $(U; (u, v))$ の存在(定理 14.4)によって，

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \tag{15.1}$$

と表されているとしてよい．

定理 15.1 (**フルネの公式**) 上の状況で，$p_u = \partial p/\partial u$，$p_v = \partial p/\partial v$ と単位法線ベクトル ν をそれぞれ列ベクトルと思って並べてできる 3 次正方行列 $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は

$$\mathcal{F}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{F} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathcal{F} = \mathcal{F}\Lambda \tag{15.2}$$

をみたす．ただし，

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$$

であり，L, M, N は曲面 p の第二基本量である．

［**証明**］ 命題 11.1 と (10.4) および練習問題 11 の **1** の結果を用いて直接計算により示せる．あるいは [2] の第 1 章にも別証がある． □

フルネの公式 (15.2) をさらに微分して $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{uv} &= (\mathcal{F}\Omega)_v = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v \\ &= \mathcal{F}(\Lambda\Omega + \Omega_v), \\ \mathcal{F}_{vu} &= \mathcal{F}(\Omega\Lambda + \Lambda_u) \end{aligned}$$

であるから，

$$\mathcal{F}(\Lambda\Omega + \Omega_v) = \mathcal{F}(\Omega\Lambda + \Lambda_u)$$

が成り立つことがわかる．この両辺に $\mathcal{F}$ の逆行列を左から掛けて，

$$\Lambda\Omega + \Omega_v = \Omega\Lambda + \Lambda_u \tag{15.3}$$

を得る．これは $\mathcal{F}$ を未知関数とする微分方程式 (15.2) が任意の初期値に対して解をもつための必要十分条件であることが知られている[1)]．直接計算により次の定理が成り立つことがわかる（証明は練習問題とする）．

定理 15.2 (15.3) は次の 3 つの式と同値である：

$$\sigma_{uu} + \sigma_{vv} + e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0\,, \tag{15.4}$$

$$L_v - M_u = \sigma_v(L + N)\,, \tag{15.5}$$

$$N_u - M_v = \sigma_u(L + N)\,. \tag{15.6}$$

Δ を ds^2 に関するラプラシアンとすると，本章で定義したガウス曲率は

$$K = -\Delta\sigma = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})$$

で与えられるから，(15.4) を

$$K = \frac{LN - M^2}{e^{4\sigma}} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{15.7}$$

と書き換えることができる．この式は**ガウスの方程式**とよばれ，§11 で紹介した式（定理 11.2）と同値である．(15.5), (15.6) は**コダッチ[2)] 方程式**とよばれる[3)]．ガウス方程式は，すでにガウス・ボンネの定理を導くのに用いられた．

次の項では，平均曲率一定の曲面について，コダッチ方程式の応用を紹介しよう．

ホップの定理　§8 で見たように，球面は $\boldsymbol{R}^3$ の中の平均曲率が一定な閉曲面を与えている．ここでは，球面を特徴づける次の定理を証明する．

1） フロベニウスの定理．たとえば［8］の第 III 章 §8 の定理 1 よりこのことを導ける．

2） Codazzi, Delfino (1824 - 1873)．

3） 第二基本形式を $II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ とおくと，この式は ∇II が対称テンソルになることと同値である．

定理 15.3（ホップの定理） 種数0，つまり球面と同相な多様体 S のはめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ の平均曲率が一定ならば，$p(S)$ は球面と合同である．

この定理を証明するために，いくつかの準備をしておく．

向きづけられた2次元多様体 S から $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ を考える．定理14.5より，S には，第一基本形式 ds^2 に関する正の向きの等温座標系によって複素多様体の構造が与えられているとする．S の正の等温座標系 (u, v) に関して，第一基本形式が (15.1) のように表されているとしておく．第二基本量を L, M, N としたとき，平均曲率は

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} e^{-2\sigma}(L + N) \tag{15.8}$$

で与えられる．複素座標 $z = u + iv$ を用いて

$$Q := \frac{1}{4}((L - N) - 2iM)\,dz^2 \qquad (\,dz := du + i\,dv\,) \tag{15.9}$$

で定義される Q を p の**ホップ微分**とよぶ．

補題 15.4 ホップ微分 Q は複素座標の取り方によらない．

［**証明**］ 別の複素座標 $w = \xi + i\eta$ をとり，この座標系に関する第二基本量を $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ とすると，次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}.$$

コーシー・リーマンの方程式 $u_\xi = v_\eta$，$u_\eta = -v_\xi$ を用いて

$$\{(\tilde{L} - \tilde{N}) - 2i\tilde{M}\}\,dw^2 = \{(L - N) - 2iM\}\,dz^2$$

が成り立つことを示せばよい．実際，左辺において $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ を L, M, N の式に置き換えた式が，右辺に

$$dz = d(u + iv) = (u_\xi + i v_\xi)\,d\xi + (u_\eta + i v_\eta)\,d\eta = (u_\xi - i u_\eta)\,dw$$

を代入した式に一致することが容易に確かめられる． □

(15.7), (15.8) より $4(H^2 - K)$ は $(L - N)^2 + 4M^2$ に等しいので，<u>Q が点 z において0になることと，z に対応する曲面上の点が臍点（§9参照）</u>

となることは同値であることがわかる．すべての点が臍点であるような曲面を**全臍的**な曲面とよぶ．§9で見たように(命題9.5)次が成り立つ．

補題 15.5 全臍的な曲面は，球面の一部か平面の一部に限る．

複素座標とホップ微分を用いると，コダッチ方程式は次のように簡単な形で書き表すことができる(証明は練習問題とする)．

補題 15.6 以上の状況で，ホップ微分を $Q = q(z)\,dz^2$ とおくと，コダッチ方程式 (15.5), (15.6) は次と同値である：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial z} = e^{-2\sigma}\frac{\partial q}{\partial \bar{z}}.$$

ただし，H は平均曲率で，

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

である．

コーシー・リーマンの方程式より $\partial q/\partial \bar{z} = 0$ は q が正則関数であることと同値だから次がわかる．

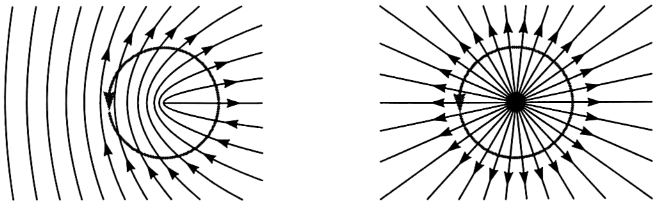
系 15.7 一定な平均曲率をもつ向きづけ可能な曲面のホップ微分は正則である．

ここで，節末問題の**2**より，0でない一定な平均曲率 H をもつ曲面は向きづけ可能であることに注意しておく．

曲面が向きづけ不可能であっても，十分小さい断片は向きづけ可能であるから局所的には複素多様体の構造が入る．定数でない正則関数の零点は孤立しているから，

系 15.8 全臍的でない，一定な平均曲率をもつ曲率の臍点は孤立する．とくに全臍的でない平均曲率一定な閉曲面の臍点は有限個しかない．

ホップの定理を証明するために，ベクトル場に対するポアンカレ・ホップの定理（定理13.6）を一般化して，曲率方向が定める方向の場（曲率線のこと．付録B-3参照）に対しても適用できる形で用意しておく．



$a<b<c$ の場合（回転数1/2）　　$a=b<c$ の場合（回転数1）

図15.1　楕円面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ の曲率方向の場

曲面上の臍点でない各点において主曲率方向（§9参照）を定めるベクトルを対応させることによって，臍点を除いた曲面上のベクトル場を定めたいのだが，図15.1左 のように，臍点のまわりをひと回りすると，ベクトルが逆を向いてしまう場合があり，一般にはなめらかなベクトル場をつくることができない[4]．そこで，ベクトル場の同値類として，射影的なベクトル場という概念を定義し，曲率線の流れが射影的なベクトル場としてなめらかであることを示そう．いま，2次元多様体 S 上の，必ずしも連続とは限らないベクトル場の全体を $\mathfrak{X}(S)$ で表す．2つのベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ が**射影的に同値**であるとは，任意の $\mathrm{P} \in S$ に対して P の近傍 U とその上で定義された零点をもたない関数 f が存在し，U 上で $Y = fX$ が成り立つときをいう．この同値関係を $X \sim Y$ で表し，ベクトル場の全体をこの同値関係で類別したときの各同値類のことを**射影的ベクトル場**という．ベクトル場 X の属する射影的ベクトル場を $[X]$ で表す．さらに射影的なベクトル場 ξ がなめらかとは，任意の $\mathrm{P} \in S$ に対して P の近傍 U とその上で定義された，なめらかなベクトル場 X が存在し U 上で $\xi = [X]$ が成り立つときをいう．もちろん，なめらかなベクトル場の同値類は射影的ベクトル場としてもなめらかだが，射影的ベクトル場としたときに初めてなめらかになる例もある．たとえば

4）たとえば，3つの軸の長さが互いに異なるような楕円面の臍点のまわりでは，曲率方向の場は図15.1のようになる．

$\boldsymbol{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上で定義されたベクトル場

$$X(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(r\cos\frac{\theta}{2}, r\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi,\ r > 0)$$

は，x 軸の正の部分で連続ではないが，射影的ベクトル場 $[X]$ としてなめらかである．つまり射影的ベクトル場としてのなめらかさとは，与えられたベクトル場について進行方向の矢印(向き)を無視した流れとしてのなめらかさを意味する．

2 次元多様体 S 上の，有限個の点 $\{\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n\}$ を除いたところで定義された零点をもたないなめらかな射影的ベクトル場 ξ に対して，通常のベクトル場と同様に P_j における指数 $\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi$ を定義することができる．実際，$\gamma_j : [0, l] \to S$ を P_j のまわりを一周する単純閉曲線とすると，γ_j 上に沿って定義されたなめらかなベクトル場 Y_j で $[Y_j(t)] = \xi_{\gamma_j(t)}$ が $[0, l]$ 上で成り立つようなものをとることができる．この $Y_j(t)$ が $t=0$ から $t=1$ に変化するまでの回転数として $\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi$ を定義する．すなわち，$Y_j(t)$ に対して，通常のベクトル場の回転指数の定義(§13，134 ページ)と同様に，$\gamma(t)$ から測った $Y_j(t)$ との角を $\psi_j(t)$ とするとき，

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi := 1 + \frac{1}{2\pi}\{\psi_j(l) - \psi_j(0)\}$$

である．通常のベクトル場の射影化なら $Y_j(0) = Y_j(l)$ が成り立つが，そうでなければ $Y_j(0) = -Y_j(l)$ となる可能性がある．このことから，射影的ベクトル場の回転数は一般には半整数値をとることがわかる．たとえば，楕円面は図 15.1 のような曲率線をもつので主曲率方向の場の指数はそれぞれ 1/2 と 1 である．この場合にも，定理 13.6 の証明法が有効で，次が成り立つ．

定理 15.9 (射影的ベクトル場に対するポアンカレ・ホップの定理)　コンパクトで向きづけられた 2 次元多様体 S 上の，有限個の点 $\{\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n\}$ を除いたところで定義された 0 にならないなめらかな射影的ベクトル場 ξ に対して次が成り立つ：

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi = \chi(S).$$

［証明］　定理 13.6 の証明とほぼ平行した形で示すことができる．S にリーマン計量を入れ，各 P_j を中心とする半径 ε の左回りの測地円を $C_j(\varepsilon)$ とし，S からこれら n 個の測地円の内部を除いた領域を D_ε とする．射影的ベクトル場 ξ はなめ

らかであるから，D_ε の各点の近傍 U 上の単位ベクトル場 $\boldsymbol{e}_1$ で $[\boldsymbol{e}_1]=\xi$ となるものが存在する．さらに，$\boldsymbol{e}_2$ を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が U 上の正の正規直交基底の場となるように定める．このとき U 上で接続形式 μ が定まるが，この μ は U の取り方によらない．実際，U を取り換えると $\boldsymbol{e}_1$ は $-\boldsymbol{e}_1$ に変わる可能性があるが，このとき $\boldsymbol{e}_2$ の符号も同時に変化するからである．したがって，とくに μ が D_ε 上で定義される．すると定理 13.6 の証明とまったく同様に

$$2\pi\chi(S)=\int_S K\,dA=-\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)}\mu$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)}(\kappa_g\,ds+d\psi_j)=2\pi n+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j(\varepsilon)}d\psi_j$$

となる．ここで ψ_j の定義から

$$\int_{C_j(\varepsilon)}d\psi_j=2\pi\,(\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi-1)$$

が成り立つので結論が示された． □

本論にもどろう．以下，コンパクトで向きづけられた 2 次元多様体 S から $\boldsymbol{R}^3$ への平均曲率一定かつ全臍的でないはめ込み $p: S\to\boldsymbol{R}^3$ の臍点を $\{\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n\}$ とする．すると S から $\{\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n\}$ を除いた点で，2 つの主曲率方向に対応する射影的ベクトル場 ξ_1, ξ_2 が定まる．このとき，

補題 15.10 主曲率方向から定まる射影的ベクトル場 ξ_1, ξ_2 はなめらかで，各臍点 P_j に対して

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi_1=\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j}\xi_2=-\frac{1}{2}\,\mathrm{ord}_{\mathrm{P}_j}Q\qquad(j=1,\cdots,n)$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{ord}_{\mathrm{P}_j}Q$ は，P_j のまわりの複素座標 z を用いて $Q=q(z)\,dz^2$ と表したときの，正則関数 q の P_j における零点の位数である．

［証明］ 点 P_j の近傍の複素座標 $z=u+iv$ により ds^2 が (15.1) のように表されているとする．§8 の (8.4) 式で定義された行列

$$A:=\hat{I}^{-1}\widehat{II}=e^{-2\sigma}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$$

の固有ベクトルの方向が主曲率方向だから，$d:=\sqrt{(L-N)^2+4M^2}$ とおくと，

$$X_1 := \begin{pmatrix} 2M \\ -(L-N)+d \end{pmatrix}, \qquad X_2 := \begin{pmatrix} 2M \\ -(L-N)-d \end{pmatrix}$$

で定義される 2 つのベクトル場は，0 でない限り主曲率方向を与えている．これらをそれぞれ $\pi/2$ だけ左に回転させたベクトル場を $X_1{}^{\perp}, X_2{}^{\perp}$ とすると，主方向は互いに直交するので，X_1 と $X_2{}^{\perp}$ (および X_2 と $X_1{}^{\perp}$) は互いに比例し，$\{X_1, X_2\}$ は同時に 0 になることはないので，

$$\xi_1 := \begin{cases} [X_1] & (X_1 \neq 0 \text{ のとき}), \\ [X_2{}^{\perp}] & (X_2 \neq 0 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\xi_2 := \begin{cases} [X_2] & (X_2 \neq 0 \text{ のとき}), \\ [X_1{}^{\perp}] & (X_1 \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により P_j の近傍から P_j を除いた点で定義された 2 つのなめらかな射影的ベクトル場 ξ_1, ξ_2 が定まり，定義から，それらの方向はそれぞれ異なる主方向を定める．

いま，$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル (α, β) を複素数 $\alpha + i\beta$ と同一視して

$$X_1 = r_1 e^{i\tau_1}, \qquad X_2{}^{\perp} = r_2 e^{i\tau_2} \qquad (r_1, r_2 > 0)$$

とおけば，$\{X_1, X_2{}^{\perp}\}$ は一次従属なので $\tau = \tau_1 = \tau_2$ としてよい．P_j をひと回りしたときの角度 τ の変化が $2\pi\, \mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} \xi_1$ である．ここで，$Q = q(z)\, dz^2$ とおき，$X_2{}^{\perp} = iX_2$ に注意してベクトルを複素数とみなしてその積を計算すると

$$X_1 X_1 = -8(L-N-d)\,\overline{q(z)}, \qquad X_2{}^{\perp} X_2{}^{\perp} = 8(L-N+d)\,\overline{q(z)}$$

となり，$\overline{q(z)}$ の実数倍となっている．臍点 P_j をひと回りすると，上の 2 式の左辺の偏角は (角度 τ の変化の 2 倍の) $4\pi\, \mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} \xi_1$ だけ変化する．一方 $z = \mathrm{P}_j$ が $q(z)$ の k 位の零点とすると

$$\overline{q(z)} = \overline{(z - \mathrm{P}_j)}^{\,k} + o((z - \mathrm{P}_j)^k)$$

の偏角の変化は $-2k\pi$ に等しく，$\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} \xi_1 = -(\mathrm{ord}_{\mathrm{P}_j} Q)/2$ であることがわかる．同時に $\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_j} \xi_2 = -(\mathrm{ord}_{\mathrm{P}_j} Q)/2$ も示される． □

以上の準備のもと，ホップの定理を証明しよう．

[**ホップの定理 15.3 の証明**] 種数 0 のコンパクト 2 次元多様体 S から $\boldsymbol{R}^3$ への平均曲率一定なはめ込み $p : S \to \boldsymbol{R}^3$ をとる．もし，p が全臍的なら，補題 15.5 よりこれは球面に合同になる．そこで，p が全臍的でないとする．S は球面と同相なので，とくに向きづけ可能であるから，等温座標系から複素構造を与えることが

できる．このとき，系 15.8 から，臍点は有限個なので，それらを $\{P_1, \cdots, P_n\}$ とする．ホップ微分 Q は S 上正則であるが，定理 15.9 と補題 15.10 を用いると

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}_{P_j} Q = -2 \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}_{P_j} \xi_1 = -2\chi(S) = -4$$

となる．Q の零点の位数は正であるから，これは不可能である． □

ホップより以前に，アレクサンドロフ[5]は，種数の仮定なしに，平均曲率が一定な自己交叉をもたない閉曲面は球面に限ることを示した．ホップの定理は，自己交叉に関する仮定をもたないので，アレクサンドロフの結果とは独立な主張であることに注意しておく．

閉曲面という仮定を除けば，球面や円柱以外に付録 B-6 で紹介するデロネイ曲面のような非自明な例が存在するが，自己交叉を許したとき，種数が 1 以上の平均曲率一定の閉曲面が存在するか，という問題は長い間，未解決であった．しかし，1986 年にウェンテが，平均曲率一定のトーラス（§6 の図 6.4 参照）を発見し，その後，種数が 2 以上の例がカプレアス[6]によって見いだされた．これらの発見によって平均曲率一定曲面の研究は大きな進歩をとげ，現在でも興味深い話題はつきない．この分野に関する最近の研究については [2] を参照されたい．

問題 15

1. はめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ を S 上の 3 つのなめらかな関数の組とするとき，

$$\Delta p = 2H\nu$$

が成り立つことを示せ．ただし，Δ は S の第一基本形式 ds^2 に関するラプラシアン，H は平均曲率，ν は単位法線ベクトルである．

2. 平均曲率が決して 0 にならないはめ込み $p: S \to \boldsymbol{R}^3$ が存在するならば，S は向きづけ可能であることを証明せよ．

5） Alexandrov, Alexandr Danilovich (1896 - 1982).

6） Kapouleas, Nikolaus.

§ 16. 最速降下線としてのサイクロイド

点Ｐを出発した物体が，重力のみによって地面に鉛直な平面内のある曲線 γ 上を滑りながらＰより低い位置にある点Ｑに到達するとき，その所要時間が最小になる経路 γ を**最速降下線**という．最速降下線はＰを通る水平線を底線とするサイクロイドになることが知られている．このことを示そう．なお，サイクロイドの性質については付録 B-1 を参照されたい．

上半平面 $D=\{(u,v)\mid v>0\}$ 上の計量

$$ds^2=\frac{1}{v}(du^2+dv^2)$$

を考える．D 上の曲線 $\gamma(t)=(u(t),v(t))\ (a\leqq t\leqq b)$ の長さは

$$\int_a^b\sqrt{\frac{\dot{u}^2+\dot{v}^2}{v}}\,dt$$

で与えられる．このことと付録 B-1 の問題 **3** (1) から，曲線 γ の始点をＰ，終点をＱ(ＱはＰより上側にある)とするとき，もしもＰが u 軸上にあれば，P, Q を結ぶ最短線を求める問題が最速降下線を求める問題と同値であることがわかる．

そこで，まずＰが u 軸の上側にある場合に，P, Q を結ぶ最短線は，u 軸に直交し P, Q を通るサイクロイドであることを示し，その極限として，Ｐが u 軸上にある場合にも，Ｐで u 軸に直交しＱを通るサイクロイドが最短線であることを証明する．

最短線があるとしたら，それは u 軸に直交するサイクロイドであることは問題 14 の **4** からすでにわかっているので，問題の本質は，そのサイクロイドが本当に最短線になっていることを示すことにある．このことは，以下の２つの定理からわかる．(ds^2 が完備であれば，このことはリーマン多様体の一般論として知られている([10])が，この計量は完備でないので，以下の議論が必要である．)

定理 16.1　$\mathrm{P},\mathrm{Q}\in D$ とするとき，P と Q を結ぶ最短線がただ一つ存在して，それは u 軸に直交し P, Q を通るサイクロイドである．

［**証明**］　$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ を，P と Q を結ぶ区分的に滑らかな D 上のすべての曲線の長さの下限とする．この d は領域 D 上の距離になることがリーマン多様体の一般論として知られている（[9],[10] 参照）．最短線とは，長さが $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ と等しい PQ を結ぶ曲線のことである．（区分的になめらかな曲線の範囲での）最短線は，存在すれば弧長パラメータに取り直すことにより測地線に一致する（たとえば [10] の第 II 章の命題 2.6 を参照）．さらに，問題 14 の **4** で示したように，そのような最短線は存在すれば一意であり，それは u 軸に直交するサイクロイドである．そこで，ここでは 2 点を結ぶ区分的になめらかな最短線の存在のみを示せばよい．

一般性を失うことなく，Q は P より上側にあるとしてよい．P の v 座標を v_0 とし，P を通り u 軸に平行な直線を m とする．まず，m より下を通る経路については m に置き換えて得られる曲線の方が長さが短くなる．

実際，始点が P で終点 Q が m 上にあり，始点から終点までの間が m より下側にある曲線 $\gamma(t)=(u(t),v(t))$（$a\leqq t\leqq b$）を考えると，

$$\int_a^b\sqrt{\frac{\dot{u}^2+\dot{v}^2}{v}}\,dt\geqq\int_a^b\frac{1}{\sqrt{v_0}}|\dot{u}|\,dt\geqq\left|\int_a^b\frac{1}{\sqrt{v_0}}\,\dot{u}\,dt\right|\geqq\frac{1}{\sqrt{v_0}}|u(b)-u(a)|$$

となり，右辺は線分 PQ の長さだからこのことがわかる．

よって，閉領域 $\{v\geqq v_0\}$ 内の P, Q を結ぶ区分的になめらかな曲線の全体の中に，長さが $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ に収束する曲線列 $\{\gamma_n\}$ をとることができる．γ_n の長さは n について単調減少であるとしてよい．γ_1 の長さを l_1 としよう．

$$C:=\{v\geqq v_0\}\cap\overline{B(\mathrm{Q},l_1)}\qquad\text{ただし}\ \overline{B(\mathrm{Q},l_1)}:=\{\mathrm{R}\in D\mid d(\mathrm{Q},\mathrm{R})\leqq l_1\}$$

とすると，定義からすべての γ_n の像はコンパクト集合 C の中に入る．

一般にリーマン多様体 S の開近傍 U で，U 内の任意の 2 点が U 内で最短測地線で結ばれるとき，U は凸（とつ）である，といわれる．リーマン多様体の任意の点に対して，その点の近傍で凸であるもの（**凸近傍**）が存在する（[10] の 221 ページ）．ここで，コンパクト性より C を有限個の凸近傍で覆うことができるから，ある正の数 $\varepsilon>0$ が存在して C 内の距離が ε 以下の任意の 2 点はどれかの凸近傍の内部にあるようにとれる（たとえば [26] の 86 ページの定理 11.3 を見よ）．一般性を失うことなく，すべての γ_n は区間 $[0,1]$ 上で定義され，パラメータは弧長に比例す

るとしてよい．自然数 N を $l_1/N < \varepsilon$ となるようにとり，

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$$

を $[0,1]$ の N 等分点とする．すると隣り合う 2 点間の距離は，すべての γ_n について ε より小さくなり，2 点間を最短線で置き換えることができる．このようにして得られる折れ測地線の族を $\{\tilde{\gamma}_n\}$ とする．各 $\tilde{\gamma}_n$ の長さは γ_n より短くなるから，$\tilde{\gamma}_n$ の長さは $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ に収束する．C のコンパクト性から，必要なら部分列をとることにより $\mathrm{A}_j = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t_j)$ （$j = 0, \cdots, N$）が存在するとしてよい．$\tilde{\gamma}_n$ の長さは

$$\sum_{j=1}^{N} d(\gamma_n(t_j), \gamma_n(t_{j-1}))$$

で与えられる．この式で $n \to \infty$ とすると，$\mathrm{P} = \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_N = \mathrm{Q}$ を結んでできる折れ線の長さに収束し，この折れ線は最短線であることがわかる．□

定理 16.2　P を u 軸上の点，$\mathrm{Q} \in D$ とするとき，P と Q を結ぶ最短線がただ一つ存在して，それは u 軸に直交し P, Q を結ぶサイクロイドである．

［**証明**］　いま，P, Q を結び u 軸に直交するサイクロイドの長さを l_0 とする．γ を l_0 より短い長さをもつ P, Q を結ぶ曲線としよう．$\{\mathrm{P}_n\}$ を γ 上の点の列で

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{P}$$

をみたすものとする．定理 16.1 の証明より γ は u 軸と始点以外で交わらないとしてよい．P_n と Q を結ぶ最短線を σ_n とすると，σ_n と γ の長さ $\mathcal{L}(\sigma_n)$，$\mathcal{L}(\gamma)$ について

$$\mathcal{L}(\sigma_n) < \mathcal{L}(\gamma) < l_0,$$

$n \to \infty$ として，定理 16.1 より σ_n がサイクロイドの弧であることに注意すれば

$$l_0 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\sigma_n) \leqq \mathcal{L}(\gamma) < l_0$$

となり矛盾である．よって P, Q を結ぶサイクロイドの最短性が導けた．サイクロイド以外の最短線の存在は，その最短線が局所的に（u 軸に直交する）サイクロイドであることから考えられない．よって最短経路の一意性も示された．□

§17. 多様体の測地三角形分割

第II章で閉曲面のガウス・ボンネの定理を示す際に用いた，測地三角形分割の可能性を証明しておこう．

2つの2次元多様体 S_1 と S_2 のそれぞれから円板と微分同相な領域 D_1，D_2 を取り去り，$S_1 \backslash D_1$ と $S_2 \backslash D_2$ を境界ではり合わせることによって得られる多様体を S_1 と S_2 の**連結和**とよんで，$S_1 \# S_2$ と表す．コンパクトで向きづけ可能な2次元多様体は球面か有限個のトーラスの連結和をとったものと微分同相であることが知られている（たとえば [14] 参照）．このとき，連結和をとるトーラスの個数が多様体の種数と一致する．また，向きづけ不可能なコンパクト2次元多様体は，射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ 同士の有限個の連結和と微分同相である．

トーラスや射影平面は，容易に三角形分割することができる．したがって，任意のコンパクト2次元多様体は，（測地線とは限らない一般の曲線を辺とする）三角形に分割できることがわかる．

以下，このような三角形分割から2次元リーマン多様体 S の測地三角形分割を構成しよう．必要ならば元の三角形分割をさらに細かくして，各々の三角形が凸近傍（前節参照）に含まれるようにしておく．

さらに，三角形分割の各辺上に有限個の点をとり，隣り合う点を最短測地線で結ぶ．各辺上に点を十分多くとれば，これらの測地線分は互いに交わることがないようにすることができる．

実際，まず，各頂点を中心とする非常に小さい半径の測地円を描き，各頂点から出る各々の辺が初めてこの円と交わる点を考え，頂点とこの点を結ぶ最短測地線で辺の両端の部分を置き換える．いま，このように両端を取り除いた1つの辺 γ に着目する．管状近傍の存在定理 [17] から S の局所座標近傍 $(U;(u,v))$ が存在して，U は長方形領域 $[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ を含み，区間 $0 \leqq u \leqq 1$ において曲線 $v=0$ は γ に対応し，さらに各 v 曲線は γ に直交する測地線となる．こ

の（U；(u,v)）を**管状近傍**という．いま γ 上に有限個の点をとり，隣り合う 2 点を結ぶ最短測地線が管状近傍内に入るようにする．すると，この測地線分は u 軸上のグラフで表される．（この測地線分の uv 平面上での傾きが垂直になったとすると，これは v 曲線に一致して矛盾が生じる．）　γ はあらかじめ両端を取り除いているので，必要なら ε をさらに小さくとり，γ の管状近傍が，他の辺に対して同様につくった管状近傍と互いに交わらないようにできるので，γ をこの折れ線で置き換えればよい．

このようにして，多様体を測地多角形に分割することができた．

この測地多角形を分割して，測地三角形分割を構成しよう（図 17.1）．

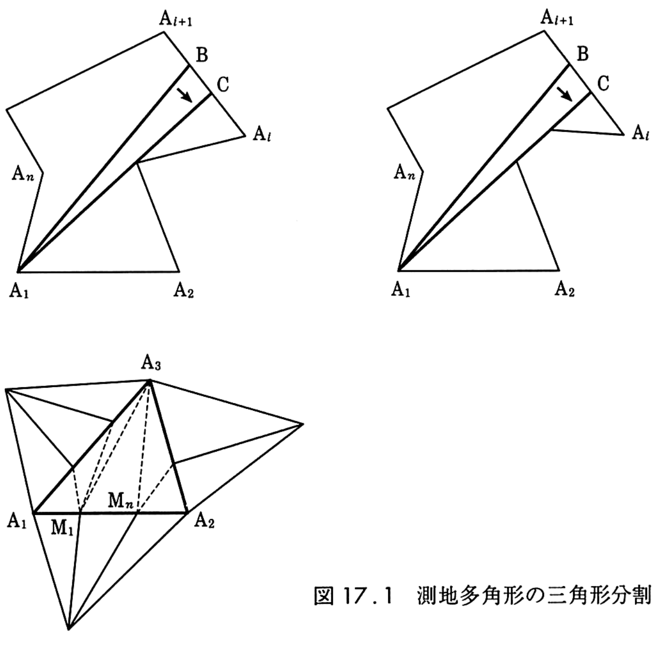


図 17.1　測地多角形の三角形分割

1 つの測地多角形 Γ の頂点を $A_1, \cdots, A_n$（$n \geqq 4$）とする．Γ は 1 つの凸近傍に含まれているから $\boldsymbol{R}^2$ の区分的になめらかな単純閉曲線とみなすことができるので，ジョルダンの曲線定理より Γ の内部をとることができる．1 つの頂点 A_1 から Γ の内部に向かって測地線をのばす．この測地線が，最

初に Γ に出会う点をBとする；もし，Bが Γ の頂点であれば，この測地線によって，Γ は元の多角形より辺の数が少ない2つの測地多角形に分割できたことになる．そこで，Bが Γ の辺上にあるとする．このとき，測地線分 A_1B は Γ の内部に向かっているから，Bは辺 A_1A_2，A_1A_n 上にはない．そこで，Bが辺 A_iA_{i+1}（$i=2,\cdots,n-1$）上にあるとする．点Bを辺 A_iA_{i+1} 上で A_i の方向に動かす．すると，しばらくは A_1B を結ぶ最短測地線は Γ の内部にとどまる．辺 A_iA_{i+1} 上でこのような性質が最初にこわれる点をCとすると，A_1C を結ぶ最短測地線は，辺 A_1A_2 か辺 A_1A_n のいずれかを含むか，または Γ の頂点 $A_3,\cdots,A_{n-1}$ のいずれかを含む．そこで，もし測地線 A_1C が辺 A_1A_2〔A_1A_n〕を含むならば，辺 A_1A_2〔A_1A_n〕の代りに辺 A_1C をとれば，Γ を辺の数がより少ない2つの測地多角形に分割できる．また，A_1C が頂点 A_j（$j=3,\cdots,n-1$）を含むならば，測地線 A_1A_j により Γ を分割すれば，辺の数がより少ない測地多角形に分割されたことになる．多角形の数は有限個であるから，この操作を繰り返せば，各々の多角形が測地三角形に分割されたことになる．

この分割では，多角形の頂点を増やしているので，1つの三角形の頂点になっている点が他の三角形の辺上にある場合がある．そこで，1つの三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ の辺 A_1A_2 上に他の三角形の頂点があったとしよう．これらを順に $M_1,\cdots,M_m$ とするとき，A_3 と $M_1,\cdots,M_m$ を最短測地線で結んでさらに小さい測地三角形に分割する．このとき，三角形 $\triangle A_3A_1M_1$，$\triangle A_3A_2M_m$ の辺 A_3A_1，A_3A_2 上にはまだ他の三角形の頂点が存在する可能性があるので，同様にして，これらをさらに測地三角形に分割する．この操作により，考えている三角形分割に新たな頂点が加わることはないので，この操作をすべての三角形に対して行えば，測地三角形分割が完了したことになる．

付録 A： 本文の補足

A-1　微積分学からの準備

微積分学で学んだ事項のうち，本書で必要となるものをまとめておく[1]．

テイラーの定理　曲線や曲面の局所的な振る舞いを調べるためには，次のテイラーの定理が有用である．

定理 1.1（**1 変数関数に関するテイラーの定理**）　1 変数関数 $f(x)$ が a と $a+h$（$h \neq 0$）を含む区間で $n+1$ 回連続微分可能[2] ならば，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{1}{2}f''(a)\,h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\,h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\,h^{n+1} \tag{1.1}$$

が成り立つ．ただし θ は $0<\theta<1$ の ある値をとる．

式 (1.1) の最後の項は**剰余項**とよばれる．一般に関数 $\varphi(x)$ に対して，

$$\lim_{x \to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p} = 0 \qquad (p \text{ は正の数})$$

が成り立つとき，

$$\varphi(x) = o((x-a)^p) \qquad (x \to a)$$

と書く[3]．この記号を**ランダウの記号**とよぶ．これを用いると (1.1) の剰余項は“$o(h^n)$（$h \to 0$）”と表すことができる．

1）　これらについては，微分積分学の教科書の [19], [23] などを参照せよ．

2）　すなわち $f^{(n+1)}$ が存在して連続であるということ．“C^{n+1} 級”ともいう．すべての n に対して C^n 級であるとき C^∞ 級という．本書で扱う関数は，とくに断らない限りすべて C^∞ 級とする．

3）　関数 $\varphi(x)$ は，x を a に近づけたとき $(x-a)^p$ より速いオーダーで 0 に近づく，という意味である．

定理 1.2（2変数関数に関するテイラーの定理） 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) を含む領域[4] $\{(x, y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon\} \subset \boldsymbol{R}^2$ （$\varepsilon>0$）で C^∞ 級[5] ならば，$h^2+k^2<\varepsilon$ なる h, k に対して

$$f(a+h, b+k)=f(a, b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,h+\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,k$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\,h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\,hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\,k^2\right)+R(h, k)$$

とおくと $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h, k)}{h^2+k^2}=0$ が成り立つ．$R(h, k)=o(h^2+k^2)$ と書く．

ロピタルの定理　§11 で，測地的極座標の性質を調べる際に(111 ページ)，次のロピタルの定理を用いた．

定理 1.3　関数 $f(x), g(x)$ が区間 $(a, a+\varepsilon)$ （$\varepsilon>0$）で微分可能で，

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=0$$

をみたしているとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f'(x)/g'(x)$ が存在するならば次が成り立つ：

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

双曲線関数　実数 t に対して

$$\cosh t:=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \sinh t:=\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \quad \tanh t:=\frac{\sinh t}{\cosh t}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$$

をそれぞれ t の**双曲的余弦**(ハイパボリック・コサイン)，**双曲的正弦**(ハイパボリック・サイン)，**双曲的正接**(ハイパボリック・タンジェント)とよぶ[6]．恒等式

4） 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 D の任意の 2 点を D 内の連続曲線で結ぶことができるとき，D は(弧状)**連結**であるといわれる．また，D 内の任意の点 (a, b) に対して (a, b) を中心とする十分小さい開円板が D に含まれるならば D は開集合であるという．$\boldsymbol{R}^2$ の連結な開集合のことを**領域**または**開領域**という．

5） 領域 D 上で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ の r 階までの偏導関数が存在して，それらが連続であるとき，f は D で C^r 級であるという．任意の r に対して C^r 級であるような関数を C^∞ 級であるという．

6） “$\cosh t$” と“$\cos ht$”（t の h 倍のコサイン）とは異なるものである．

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

が成り立つ．

積分の三角不等式　区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(t)$ に対して，不等式

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqq \int_a^b |f(t)|\, dt \tag{1}$$

が成り立つことは，定積分の定義より容易に示すことができる．ここで，等号が成立するための条件は $f(t)$ が $[a, b]$ で符号を変えないことである．不等式 (1) を**積分の三角不等式**という．

これをベクトル値関数に拡張しよう．区間 $[a, b]$ で定義され $\boldsymbol{R}^2$ に値をもつ連続関数 $f = (f_1, f_2) : [a, b] \to \boldsymbol{R}^2$ を考える．ここで $f_1(t)$，$f_2(t)$ は $[a, b]$ で定義された実数値連続関数である．関数 f の積分は

$$\int_a^b f(t)\, dt := \left(\int_a^b f_1(t)\, dt,\ \int_a^b f_2(t)\, dt \right) \in \boldsymbol{R}^2$$

で与えられるベクトルである．

定理 1.4（ベクトル値関数に対する積分の三角不等式）　区間 $[a, b]$ で定義されたベクトル値連続関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}^2$ に対して，不等式

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqq \int_a^b |f(t)|\, dt \tag{2}$$

が成り立つ．さらに (2) で等号が成立するための条件は，ある定ベクトル $\boldsymbol{a}$ が存在して $f(t) = |f(t)|\,\boldsymbol{a}$ となることである．

［**証明**］　$\boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{C}$ と同一視し，$\int_a^b f(t)\, dt = r\, e^{i\theta}$（$r > 0$，$\theta \in \boldsymbol{R}$）とすると，$f(t)$ を $f(t)\, e^{-i\theta}$ に取り換えることにより，$\int_a^b f_1(t)\, dt > 0$，$\int_a^b f_2(t)\, dt = 0$ としてよい．このとき，

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b f_1(t)\, dt \right| \leqq \int_a^b |f_1(t)|\, dt \leqq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

が成り立つ．この等号が成り立つためには $f_2(t)$ が恒等的に 0 であって $f_1(t)$ が符号を変えないことが必要十分である．これは $f(t) = |f(t)|\,\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ は定ベクトル）であることを示している．　□

陰関数定理　曲線や曲面の陰関数表示や助変数表示が実際になめらかな曲線や曲面を表すことを示すためには陰関数定理が必要である．ここでは，本文で必要な形で陰関数定理を述べる．一般的な定理と証明は，たとえば［8］の序論を見よ．

定理 1.5（逆関数定理）（1）点 a を含む数直線の区間上で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が $f'(a) \neq 0$ をみたすならば，$f(a)$ を含む区間で定義された C^∞ 級関数 $g(y)$ で $g(f(x)) = x$，$f(g(y)) = y$ をみたすものがただ一つ存在する．さらに，g の導関数 g' は

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

をみたす．

（2）平面上の点 $\mathrm{P} = (u_0, v_0)$ を含む領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義された C^∞ 級写像

$$f:\ D \ni (u, v) \longmapsto f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \boldsymbol{R}^2$$

の点 P におけるヤコビ行列式

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

が 0 でなければ，$f(\mathrm{P})$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の十分小さい領域 D' で定義された C^∞ 級写像 $g: D' \to \boldsymbol{R}^2$ で $g \circ f$ と $f \circ g$ がともに恒等写像になるもの，すなわち f の逆写像が存在する．

定理 1.6（陰関数定理） $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\mathrm{P} = (p_1, \cdots, p_n)$ を含む領域 D 上で定義された C^∞ 級関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ が

$$F(\mathrm{P}) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P}) \neq 0$$

をみたしているならば，$(p_1, \cdots, p_{n-1})$ のある近傍[7] U で定義された関数 f が存在して，

$$F(x_1, \cdots, x_{n-1}, f(x_1, \cdots, x_{n-1})) = 0 \qquad (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in U$$

をみたす．さらに，点 P の十分小さい近傍では，$F(x_1, \cdots, x_n) = 0$ をみたす点 $(x_1, \cdots, x_n)$ は，$x_n = f(x_1, \cdots, x_{n-1})$ をみたすものに限る．

7）点 $\mathrm{P} = (p_1, \cdots, p_{n-1})$ を含む $\boldsymbol{R}^{n-1}$ の領域を P の**近傍**という．

重積分の変数変換の公式 曲面の面積が助変数の取り方によらないことは，次の公式よりしたがう．

定理 1.7（**重積分の変数変換の公式**） $\xi\eta$ 平面の領域から uv 平面への C^1 級写像 $\varphi:(\xi,\eta)\longmapsto(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ によって $\xi\eta$ 平面の有界領域 $\tilde{D}$ が uv 平面の有界領域 $D=\varphi(\tilde{D})$ に1対1に写るとする．このとき D 上で積分可能な関数 $f(u,v)$ に対して

$$\iint_D f(u,v)\,du\,dv=\iint_{\tilde{D}} f(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))\,|J|\,d\xi\,d\eta$$

が成り立つ．ただし J は変数変換 φ のヤコビ行列式

$$J=\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

で，$|J|$ はその絶対値である．

A-2 常微分方程式の基本定理

与えられた n 個の $n+1$ 変数関数

(2.1) $$f_i=f_i(t;x_1,\cdots,x_n) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

に対して，

(2.2) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_i(t)=f_i(t;y_1(t),\cdots,y_n(t)) & (i=1,\cdots,n), \\ y_i(t_0)=a_i & (i=1,\cdots,n) \end{cases}$$

の形で与えられる未知関数 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$ に関する微分方程式を考える．ただし $t_0,a_1,\cdots,a_n$ は与えられた定数である．記号を簡単にするためベクトルを用いて

$$\boldsymbol{y}(t):=(y_1(t),\cdots,y_n(t)),\quad \boldsymbol{a}:=(a_1,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{f}:=(f_1,\cdots,f_n)$$

とすれば，(2.2) は

(2.3) $$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)),\qquad \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{a}$$

と書き直すことができる．このとき，次が成り立つ．

定理 2.1（常微分方程式の基本定理） 定数 t_0 と $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in\boldsymbol{R}^n$ を固定する．関数 $f_i(t;x_1,\cdots,x_n)$（$i=1,\cdots,n$）が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の領域

$$\tilde{D}:=\{(t,\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,|t-t_0|<\varepsilon,\ |x_i-b_i|<\rho\ (i=1,\cdots,n)\}$$
$$(\varepsilon>0,\ \rho>0)$$

で定義された C^∞ 級関数とする．このとき，$\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{R}^n$ における近傍 W と正の数 δ が存在して，任意の $\boldsymbol{a}\in W$ に対して区間 $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ で定義された $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}(t;\boldsymbol{a})$ で (2.3) をみたすものがただ一つ存在する．さらに $\boldsymbol{y}(t;\boldsymbol{a})$ は W 上 $\boldsymbol{a}$ に関して C^∞ 級である．

線形常微分方程式の基本定理　関数 f_i がとくに

$$f_i(t;x_1,\cdots,x_n)=b_{i1}(t)\,x_1+\cdots+b_{in}(t)\,x_n \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{2.4}$$

の形で与えられているとき，(2.2) を**線形常微分方程式**という．ただし，$b_{ij}(t)$（$i,j=1,\cdots,n$）は n^2 個の関数である．

定理 2.1 では，解 $\boldsymbol{y}(t)$ の定義域は t_0 を含む十分小さい範囲であったが，線形常微分方程式の解は，その係数 b_{ij} が定義されている区間全体を定義域にもつ．

定理 2.2（線形常微分方程式の基本定理） 点 t_0 を含む開区間 I で定義された n^2 個の C^∞ 級関数 $b_{ij}(t)$（$i,j=1,\cdots,n$）と任意の a_i（$i=1,\cdots,n$）に対して，区間 I で定義された n 個の C^∞ 関数の組 $\boldsymbol{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$ で (2.4) をみたすものがただ一組存在する．

A-3　ユークリッド空間

ここでは，空間ベクトルの性質を紹介する．ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と定数倍 $\lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda\in\boldsymbol{R}$）が定義される．この演算によって $\boldsymbol{R}^3$ はベクトル空間（線形空間）とみなすことができる．

内積　ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の**内積**とは

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

で定まる値のことである．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の大きさをそれぞれ $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$ とし，そのなす角を θ とすれば次が成り立つ：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta\,.$$

基底の正負　$\boldsymbol{R}^3$ の 3 つの一次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ はベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底をなす．これらが**正の基底**あるいは**右手系**であるとは，一次独立性を失わないように連続的に変形すると $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ にぴったり重ね合わせることができることをいう．ただし

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．正の基底でない基底を**負の基底**または**左手系**とよぶ(図 A-3.1)．3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ を列ベクトルと思って並べた行列の行列式

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3$$

の符号が基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の正負である．

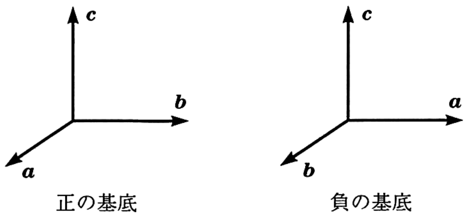


図 A-3.1　基底の符号

合同変換　実数を成分とする 3 次正方行列 T が**直交行列**であるとは，

$$ {}^tTT = T\,{}^tT = I \qquad (I \text{ は 3 次の単位行列})$$

が成り立つことである．ただし ${}^tT$ は T の転置行列を表す．3 次正方行列 T を 3 つの列ベクトルの組として $T = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ と表すと，T が直交行列であること

は $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が正規直交基底であることと同値である．定義式の両辺の行列式をとることによって，直交行列の行列式の値は 1 または -1 であることがわかる．この行列式の正負は基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の正負と一致する．T が直交行列なら任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して

$$T\boldsymbol{a}\cdot T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

が成り立つ．

直交行列 T と，定ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対して

$$\Phi(\mathrm{P}) = T\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

によって写像 $\Phi: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を定める[8]．このような Φ を $\boldsymbol{R}^3$ の**合同変換**とよぶ．2 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離を $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ とすると，これは $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の大きさであるから

$$d(\Phi(\mathrm{P}), \Phi(\mathrm{Q})) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

が成り立ち，写像 Φ は 2 点間の距離を保つことが容易にわかる．

合同変換 (3.1) で，とくに行列 T の行列式の値が 1 となるものを，**向きを保つ合同変換**という．このとき T は空間の回転を表す[9] ので，向きを保つ合同変換は「回転と平行移動の合成」ということができる．

行列式の幾何学的意味　ここで，2 次と 3 次の行列式の幾何学的意味について説明しよう．

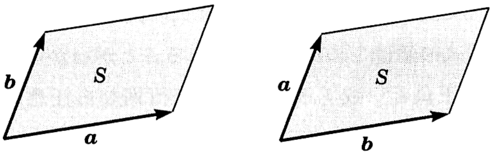
平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in \boldsymbol{R}^2$ を列ベクトルと思って横に並べてできる正方行列の行列式

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に正負の符号をつけた値に等しい（図 A-3.2）．ここで $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$ になるのは $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の左側にある場合で，$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0$ になるのは $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の右側にある場合である．

8） Φ はギリシア文字 φ（ファイ）の大文字である．

9） 実際，T は原点を通る ある直線を軸とする回転を表す（たとえば [21] の第IV章 §6 を参照せよ）．



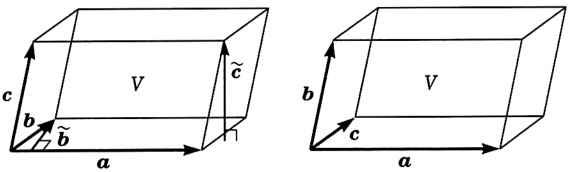
$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = S$　　　$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -S$

図 A-3.2　平行四辺形の面積

同様に，空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対して，行列式

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

は $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が一次従属ならば値は 0 であり，一次独立な場合には，その符号は基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の正負と一致する．また，その絶対値は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で作られる平行六面体の体積 V に等しい(図 A-3.3)．



$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = V$　　　$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -V$

図 A-3.3　平行六面体の体積と行列式

実際，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面において $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ へ下ろした垂線の足を始点とし，$\boldsymbol{b}$ を終点とするベクトルを $\tilde{\boldsymbol{b}}$ とする．$\boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{b}}$ は $\boldsymbol{a}$ の定数倍でしか違わないから，

$$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{c})\,.$$

さらに $\boldsymbol{c}$ から $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面に下ろした垂線の足を始点とし，$\boldsymbol{c}$ を終点とするベクトルを $\tilde{\boldsymbol{c}}$ とすると $\boldsymbol{c}, \tilde{\boldsymbol{c}}$ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合の差でしか違わないから

$$\det(\boldsymbol{a}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| \det\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \frac{\tilde{\boldsymbol{b}}}{|\tilde{\boldsymbol{b}}|}, \frac{\tilde{\boldsymbol{c}}}{|\tilde{\boldsymbol{c}}|}\right)$$

となるが $\{\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|, \tilde{\boldsymbol{b}}/|\tilde{\boldsymbol{b}}|, \tilde{\boldsymbol{c}}/|\tilde{\boldsymbol{c}}|\}$ は正規直交基底なので，169 ページで述べたことより，これらを並べた行列の行列式は ± 1 であり，作り方からその正負は基底

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の正負に一致する．ここで，積 $|\boldsymbol{a}||\tilde{\boldsymbol{b}}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積で，$|\tilde{\boldsymbol{c}}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形を底面とする平行六面体の高さなので $|\boldsymbol{a}||\tilde{\boldsymbol{b}}||\tilde{\boldsymbol{c}}|$ は，この平行六面体の体積を表す．

ベクトル積　2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**ベクトル積** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を以下のように定義する（図 A-3.4）．まず，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を2辺にもつ平行四辺形の面積と約束する．すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると次が成り立つ：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi).$$

また $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面に垂直であるとし，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ が正の基底であるものと約束する．ただし $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が一次従属の場合には，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ と定める．

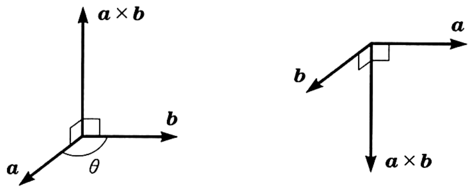


図 A-3.4　ベクトル積

2つの $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が一次独立であることと $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ は同値である．定義から

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

が成り立つ．一方，ベクトル積の大きさの定義から次の式が成り立つ：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2. \tag{3.2}$$

これを**ラグランジュの恒等式**という．

成分が与えられたベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ のベクトル積を定義から直接計算するのは難しいが，すぐあとで示すように次が成り立つ：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right). \tag{3.3}$$

命題 3.1（スカラ三重積の公式）　3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

が成り立つ．とくに，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

［**証明**］ ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が一次従属である場合は，両辺はともに $\boldsymbol{0}$ であるから等式は成り立つ．以下 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は一次独立とする．このときには $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で作られる平行四辺形に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}\}$ が右手系になるものがただ一つ存在する．内積の絶対値 $|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ から作られる平行六面体の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平面を底面とするときの高さを表す．ここで，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

であるから，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ から作られる平行六面体の体積 V に等しい．したがって，

$$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=V=|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$$

であることがわかる．一方，$\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の正負は $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が右手系か左手系かを意味するが，これは内積 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}$ の正負に一致するので，符号を込めて等式が成立する． □

ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ の一次結合で表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{e}_3\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{e}_3\\ &=\det\begin{pmatrix}1 & a_1 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2\\ 0 & a_3 & b_3\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_1+\det\begin{pmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 1 & a_2 & b_2\\ 0 & a_3 & b_3\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_2+\det\begin{pmatrix}0 & a_1 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2\\ 1 & a_3 & b_3\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

このことから，ベクトル積の代数的な表示 (3.3) が成り立つことがわかる．式 (3.3) は，形式的に行列式を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1-\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

と表されることに注意しておこう．

(3.3) からベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^3$ と実数 $\alpha, \beta\in\boldsymbol{R}$ に対して次の分配法則が成り立つことがわかる：

$$(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \tag{3.4}$$

命題 3.1 から次を示すことができる．

系 3.2 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ と直交行列 T に対して，

$$T\boldsymbol{a} \times T\boldsymbol{b} = (\det T)\, T(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

が成り立つ．とくに $\det T = 1$ ならば $T\boldsymbol{a} \times T\boldsymbol{b} = T(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ が成り立つ．

［**証明**］ 任意のベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して $\tilde{\boldsymbol{c}} = T^{-1}\boldsymbol{c}$ とおけば

$$\begin{aligned}(T\boldsymbol{a} \times T\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= (T\boldsymbol{a} \times T\boldsymbol{b})\cdot T\tilde{\boldsymbol{c}} = \det(T\boldsymbol{a}, T\boldsymbol{b}, T\tilde{\boldsymbol{c}}) \\ &= (\det T)\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \tilde{\boldsymbol{c}}) = (\det T)((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\tilde{\boldsymbol{c}}) \\ &= (\det T)(T(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot T\tilde{\boldsymbol{c}}) = (\det T)(T(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

であるが，$\boldsymbol{c}$ は任意なので結論が得られる． □

また，3 つのベクトルのベクトル積について，次の公式がある．

命題 3.3（ベクトル三重積の公式） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

が成り立つ．

［**証明**］ まず，任意のベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に対して

$$\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\boldsymbol{p} - |\boldsymbol{p}|^2\boldsymbol{q} \tag{3.5}$$

が成り立つことを示そう．実際，もし $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ が一次従属ならば式 (3.5) の両辺はともに $\boldsymbol{0}$ となり等式が成り立つ．

一方，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が一次独立のとき，$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ に直交するが，$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ が張る平面に直交するので，$\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の一次結合で表される．そこで

$$\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} \qquad (\alpha, \beta \text{ は実数}) \tag{3.6}$$

と書き，この両辺に $\boldsymbol{p}$ を内積すると $(\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}))\cdot\boldsymbol{p} = \alpha|\boldsymbol{p}|^2 + \beta(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})$ となるが，この左辺はスカラ三重積の公式（命題 3.1）より

$$(\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}))\cdot\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = 0$$

なので $\alpha|\boldsymbol{p}|^2 + \beta(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) = 0$ を得る．同様に (3.6) の両辺に $\boldsymbol{q}$ を内積すると，スカラ三重積の公式とラグランジュの恒等式 (3.2) から

$$\alpha(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) + \beta|\boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{q}|^2 - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2$$

となる．これらから $\alpha = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$, $\beta = -|\boldsymbol{p}|^2$ を得るから (3.5) が成り立つことがわかる．

このことを用いて結論を導こう．$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が一次従属のときは結論は明らかだから，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は一次独立とする．このとき，上と同様にして $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の一次結合で表される：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \gamma\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{c} \qquad (\gamma, \delta \text{ は実数}). \tag{3.7}$$

ここで，(3.5) とスカラ三重積の公式から

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}))\cdot\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}))\cdot\boldsymbol{c}\\ &= (-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + |\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),\\ (\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}))\cdot\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\cdot\boldsymbol{b}\\ &= ((\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - |\boldsymbol{c}|^2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{c}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

が成り立つので，(3.7) の両辺に $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を内積すると

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{b}|^2\gamma + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\delta &= -(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + |\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}),\\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\gamma + |\boldsymbol{c}|^2\delta &= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{c}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

となるので $\gamma = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, $\delta = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ となり結論を得る． □

ベクトル三重積の公式から，次が容易に導かれる．

系 3.4（ヤコビの恒等式） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

とくに $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$ であるから，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ に平行にならないようにとれば

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

となり，ベクトル積に対しては結合法則が成立しないことがわかる．

付録 B： 曲線・曲面からの進んだ話題

B-1 サイクロイド振り子と縮閉線

包絡線 パラメータ t がある区間 $[a, b]$ 上を動くとき，各 t に対して 1 つずつ曲線 C_t が対応している，すなわち曲線の族 $\{C_t\}_{t\in[a,b]}$ を考える．この各々の曲線 C_t すべてに接するような曲線 σ が存在するとき，σ を曲線族 $\{C_t\}$ の**包絡線**という．たとえば xy 平面上の点 $(t, 0)$ と $(0, 1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を結ぶ線分を C_t として，これを図に描くと，包絡線が浮かび上がってくる（図 B-1.1 左）．

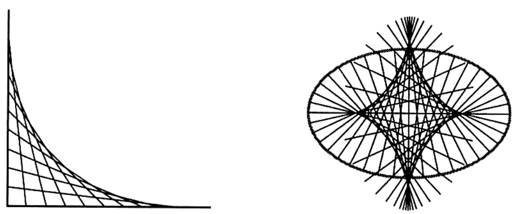


図 B-1.1 包絡線

曲線族 $\{C_t\}$ が陰関数 $F(x, y, t) = 0$ で与えられているなら，方程式

$$F(x, y, t) = 0, \qquad F_t(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0$$

が包絡線を与える．実際に包絡線の方程式を求めるには，これら 2 式から t を消去したり，あるいは x, y を t についてとけばよい．

実際，曲線 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ が各 t で C_t に接しているとする．このとき $\sigma(t)$ は C_t 上にあるので $F(x(t), y(t), t) = 0$ となり，さらにその点で C_t に接しているので，陰関数の微分公式から $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ となる．$F(x(t), y(t), t) = 0$ はすべての t について成り立つから，これを t で微分すると $F_t + F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0$ となるが，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$ より $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0$ なので $F_t = 0$ である．

逆に $F(x(t), y(t), t) = F_t(x(t), y(t), t) = 0$ をみたす曲線 $(x(t), y(t))$ は $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0$ となるので，各 t で C_t に接し，包絡線になる．

最初の例では $F(x, y, t) = ty + (1-t)x - t(1-t)$ であるから，包絡線の方程式は

$$ty + (1-t)x - t(1-t) = 0, \qquad y - x - 1 + 2t = 0.$$

これより t を消去して

$$(x-y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0$$

となる．したがって，図1.1左 の包絡線は放物線であることがわかる．

縮閉線　与えられた曲線の法線がつくる包絡線を考えよう．たとえば，楕円の法線を描くと，図1.1右 のような包絡線が得られる．この曲線は楕円の曲率円の中心（曲率中心）の軌跡に一致する．一般に次の定理が成り立つ．

定理 1.1　曲線 $\gamma(s)$ の法線の包絡線 $\sigma(s)$ は，その曲線の曲率円の中心の軌跡

$$\sigma(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s) \tag{1.1}$$

（κ は γ の曲率，$\boldsymbol{n}$ は γ の単位法線ベクトル）

に一致する．この曲線 $\sigma(s)$ を $\gamma(s)$ の**縮閉線**という．

［**証明**］　弧長 s をパラメータとする曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ の s における法線の方程式は

$$F(X, Y, s) := x'(s)(X - x(s)) + y'(s)(Y - y(s)) = 0$$

である．ここで s は曲線 γ の弧長パラメータであるから

$$\frac{\partial F}{\partial s} = x''(s)(X - x(s)) + y''(s)(Y - y(s)) - 1$$

となるので，$F = \partial F/\partial s = 0$ を X, Y について解くと

$$X = x - \frac{y'}{x'y'' - x''y'} = x - \frac{y'}{\kappa}, \qquad Y = y + \frac{x'}{x'y'' - x''y'} = y + \frac{x'}{\kappa}$$

を得る．したがって，包絡線 $\sigma(s) = (X(s), Y(s))$ は曲率中心の軌跡である．　□

式 (1.1) を微分すると $\sigma' = (1/\kappa)'\boldsymbol{n}$ となるので，元の曲線の頂点に対応する点で縮閉線の速度ベクトルは消えて，一般には，とがった点（カスプ点）になる．とくに楕円の場合には図1.1右 のように4個のカスプ点が現れる．

縮閉線が，曲線の法線の包絡線として得られるという事実を用いて，逆に与えられた曲線を縮閉線にもつ曲線を描くことができる．曲線 $\sigma(s)$ をボール紙の縁と思って $\sigma(0)$ と $\sigma(\delta)$ の間に糸を巻き付ける．一方の端 $\sigma(0)$ を固定したままで糸をたわませず徐々にほぐすことを考える（図 B-1.2 左）．糸が $\sigma(s)$ $(0 \leqq s \leqq \delta)$ までほぐれたときの，糸のほぐしていった側の先端の位置を $\gamma(s)$ とする．このとき，助変数 s を曲線 σ の弧長とすれば

$$\gamma(s) = \sigma(s) + (\delta - s)\sigma'(s) \qquad (0 \leqq s \leqq \delta) \tag{1.2}$$

と表すことができる．すると $\gamma'(s) = (\delta - s)\sigma''(s)$ となるが，s が σ の弧長であることから $\sigma'(s)$ と $\gamma'(s)$ は直交することがわかる．すなわち，糸の直線部分は γ の法線となっているので，定理 1.1 より $\sigma(s)$ は新しい曲線 $\gamma(s)$ の縮閉線になっていることがわかる（節末問題の **1** 参照）．このようにして得られた曲線 $\gamma(s)$ を $\sigma(s)$ の**伸開線**とよぶ．伸開線 $\gamma(s)$ の曲率半径は伸ばした糸の長さ $\delta - s$ で与えられる．「伸開」という言葉の意味は，この作図法による．また，ほぐれた糸を元のボール紙に収めれば $\sigma(s)$ になることに着目すれば「縮閉線」という言葉の意味も理解できるだろう．ここで δ は任意に選ぶことができるから，与えられた曲線に対してその伸開線は一意には決まらない．

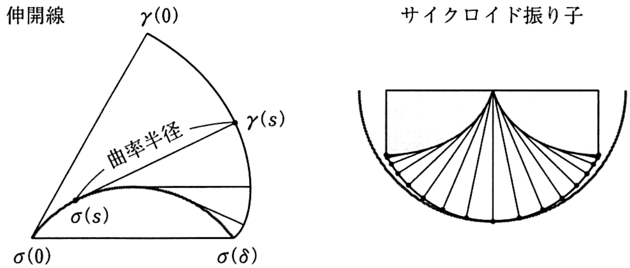


図 B-1.2

サイクロイド振り子への応用　ガリレイ[1] は，振幅が小さい振り子の周期は振り子の重さや振幅によらず，糸の長さだけによって定まることを発見した（振り子の等時性）．実際，周期 T は，糸の長さ l と重力加速度 g を用いて $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$ と表される．ただし“ $\approx$ ”はおよそ等しいことを表す．この法則は振幅が小さいときは近似的に成立するが，厳密には，振り子を高い位置で離すと低い位置の場合

1） Galilei, Galileo (1564 - 1642).

より周期が長くなることが知られている．それでは，本当にどこで手を離しても周期が変わらない振り子を作るにはどうしたらよいだろうか．

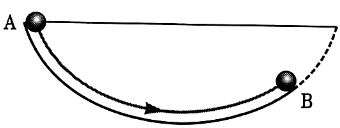
ガリレイの振り子の周期を与える式が不正確であることに気付いたホイヘンス[2)]は，サイクロイド(練習問題1の**4**参照)に関して次の2つのことを発見した．

（1） 逆さにしたサイクロイドに玉を置いて手を離すと，玉が転がって真下に到達する時間は玉を置いた場所によらず一定になる(節末問題の**3**参照)．

（2） サイクロイドの縮閉線は元の曲線と合同なサイクロイドになる．とくに，位置をうまく選べば，サイクロイドの伸開線は元の曲線と合同なサイクロイドになる(節末問題の**2**参照)．

そこで，図1.2右 のような装置を考えよう．左右のあて板はサイクロイドの半分である．性質 (2) から，左側のあて板に巻きついたおもりは，ほぐれるにしたがって右側のあて板と同じサイクロイドの左半分を描く．糸が完全にほどけたときに振り子は真下を向くが，次に右側のあて板に巻きついていき，おもりは左のあて板とまったく同じサイクロイドの半分を描く．このようにして，振り子はなめらかにサイクロイドの1周期を描くので，性質 (1) からこのサイクロイド振り子の周期 T は振幅によらず，正確に $T=2\pi\sqrt{l/g}$ となる(節末問題の**3**参照)．ここで，l は図B-1.2右 に点線で描かれている円の半径である．長さ l の普通の振り子(円振り子)はこの円に沿って動くから，円軌道とサイクロイド振り子の描く軌道は，ほとんど一致することがわかるだろう．実際，振り子の最下点でサイクロイドと円は3次の接触をする．このことはガリレイの「円振り子の等時性」が非常に良い近似であることを示している．サイクロイド振り子の発見の経緯については[23] を見よ．

サイクロイドは，また最速降下線としての性質をもつ．すなわち点Aを出発した物体が重力のみによって ある曲線上を滑りながらAより低い位置にある点Bに到達するとき，その所要時間が最小になる経路が，Aを通る水平線を底線とするサイクロイドになる．このことの証明は§16で与えてある．



図B-1.3 最速降下線

2） Huygens, Christiaan (1629 - 1695).

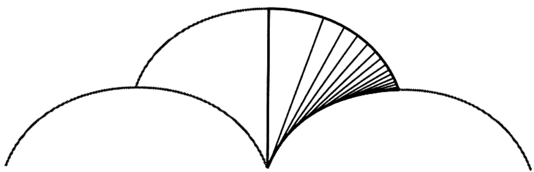
問　題

1. 弧長によってパラメータづけられた曲線 $\sigma(s)$ （$0 \leqq s \leqq l$）に対して，$0 < \delta \leqq l$ なる δ を１つ固定して

$$\gamma(s) := \sigma(s) + (\delta - s)\,\sigma'(s) \qquad (0 \leqq s \leqq \delta)$$

と定めると $\sigma(s)$ は $\gamma(s)$ の縮閉線となることを，直接計算によって示せ．

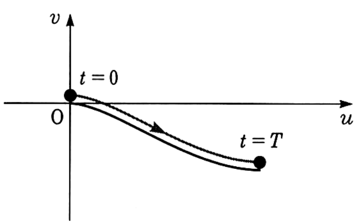
2. サイクロイドの縮閉線は元の曲線と合同なサイクロイドであることを示せ．これを用いて，下の図のようにして得られるサイクロイドの伸開線は元のサイクロイドと合同な曲線であることを示せ．

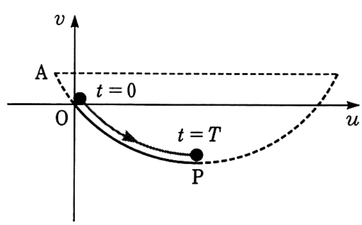


3. （１） uv 平面上で始点が u 軸上にあり，それ以外の点が下半平面 $\{(u, v) \mid v < 0\}$ にあるような曲線 $\gamma(w) := (u(w), v(w))$ （$b \leqq w \leqq c$）を考える．時刻 $t = 0$ で点 $\gamma(b)$ を速度０で出発した質量 m の物体（質点）が重力 $(0, -mg)$ （g は重力加速度）のみによって曲線 $\gamma(w)$ の形をした斜面を滑り落ちるとき（下の左図参照），物体が γ の終点 $\gamma(c)$ に到着するまでの時間 T は

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_b^c \frac{1}{\sqrt{|v|}}\sqrt{\left(\frac{du}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dw}\right)^2}\,dw = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_b^c \sqrt{\frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{|v|}}\,dw$$

で与えられることを示せ．（ヒント：力学的エネルギーの保存法則を用いよ．）





（2） 練習問題1の**4**で与えられたサイクロイドの上下を反転させた形をした斜面の，最も低い点P以外のところに物体(質点)をおき，初速度0で転がすとき，物体が点Pに到達するまでの時間は，物体を置く位置によらず $\pi\sqrt{a/g}$ で与えられることを示せ．(ヒント： 前ページの右図のように座標軸を設定し，AO間のサイクロイドの弧長を b として，サイクロイドのAを始点とする弧長パラメータで表示せよ．)

B-2 卵形線と定幅曲線

卵形線の特徴づけ ここでは卵形線の特徴づけとして次の定理2.1を証明する．これは§4で(卵形線とは限らない)単純閉曲線に関する4頂点定理(§4の定理4.4)を証明する際に用いられる．

定理 2.1 $\gamma(s)$ （$0 \leqq s \leqq l$） を単純閉曲線とし，この曲線によって囲まれる(境界を含まない)有界な開領域を D とするとき，次の5つは同値である．

（1） 曲率関数は符号を変えない．

（2） d を向きのついた直線とすると，曲線 γ の接線 $\tilde{d}$ で，d と向きを込めて平行なものがただ一つ存在する．この接線 $\tilde{d}$ と曲線 γ の接点は，点か線分のいずれかである．

（3） D は曲線の接線と共通点をもたない．とくに D は接線の一方の側にある．

（4） D 内の任意の2点を結ぶ線分は D に含まれる．

（5） D に境界を加えた閉領域を $\bar{D}$ で表すと，$\bar{D}$ 内の任意の2点を結ぶ線分は $\bar{D}$ に含まれる．

［証明］ 曲線は領域 D を左手に見るものと仮定しても一般性を失わない．

(1) ⇒ (2)： §3の定理3.2と3.3より単純閉曲線は連続的に円に変形できる．曲線は領域 D を左手に見るものと仮定しているので，この円は左回りである．よって回転数が変形で変わらないことから，元の曲線の回転数も1であることがわかる．曲率関数 $\kappa(s)$ は符号を変えないから $\kappa \geqq 0$ でなければならない．ここで γ

は曲率 κ を用いて §2 の (2.15) のように表示されているとしてよい．すると 27 ページの式 (3.1) より

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\, du$$

は，$\gamma'(s)$ が $\gamma'(0)$ となす角度となる．$\kappa \geqq 0$ なので角度 $\theta(s)$ は $0 \leqq s \leqq l$ の変化にしたがって単調に 0 から 2π にまで増加する．したがって，中間値の定理よりこのような $\tilde{d}$ が存在する．一方，曲線の $\gamma(s_1)$ における接線と $\gamma(s_2)$ における接線が，ともに与えられた直線 d に平行とすると閉区間 $[s_1, s_2]$ で $\theta(s)$ は増加しなかったことになり，2 つの接線は一致し $\gamma([s_1, s_2])$ は，この接線上の線分であることがわかる．これで (2) が示された．

(2) ⇒ (3)： 曲線 γ 上の点 P を取り，$\tilde{d}$ を P における曲線の接線とする．$\tilde{d}$ と平行な直線 d を遠方から原点に向かって平行移動して，初めて曲線とぶつかる点 Q を考える．このとき d は Q における γ の接線でなければならず，D と d は共通点をもたない．(2) により d と平行な γ の接線は d に一致しなければならないから $d = \tilde{d}$ となり，$\tilde{d}$ は D と共通点をもたないことが示された．

(3) ⇒ (4)： D 内の 2 点 P, Q に対して，線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ が D からはみ出ているとすると，線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 上に，曲線 γ との交点 R が存在する．$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D$ であるから $\mathrm{R} \neq \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ である．R における曲線の接線を d_{R} としよう．仮に $\overline{\mathrm{PQ}}$ が d_{R} 上にあるとすると，P, Q は D と d_{R} との共通点となり (3) に矛盾する．よって $\overline{\mathrm{PQ}}$ は R において d_{R} と交わり，P, Q は d_{R} によって分断されなければならない．ところがこれは D 上の点が曲線の一方の側にあることに反する．

(4) ⇒ (5)： $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \bar{D}$ とすると D における点列 $\{\mathrm{P}_n\}, \{\mathrm{Q}_n\}$ で

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{P}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}_n = \mathrm{Q}$$

となるものが存在する．線分 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ は D 内にあるからその極限である線分 $\overline{\mathrm{PQ}}$ は $\bar{D}$ 内にある．

(5) ⇒ (1)： もし $\kappa(s) < 0$ とすると，曲率円は曲線の 2 次近似であるから，時計回りの円と同様，この付近で曲線の 2 点を結ぶとその線分は曲線の右側の領域に入る．これは $\bar{D}$ が左側の領域であることに矛盾する．よって $\kappa(s) \geqq 0$ が示された． □

さらに次が成り立つ.

定理 2.2 回転数が ± 1 かつ曲率が符号を変えない閉曲線は卵形線である.

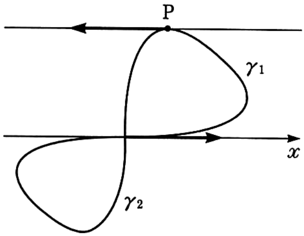
［**証明**］ 必要ならば曲線の向きを変えることにより，曲率は非負で回転数が1であるとしてよい. 定理2.1より，このような閉曲線が単純閉曲線であることを示せば十分である. そこで，弧長によりパラメータづけられた閉曲線 $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq l)$ が自己交叉をもつとして矛盾を導こう. 一般性を失うことなく $\gamma(0)$ が自己交叉であるとしてよい.

曲率関数が負でない値をとることから，ガウス写像 $\gamma'(s)$ は単位円 S^1 を左回りに1回転する. 必要なら回転と平行移動をほどこして

(2.1) $\qquad \gamma(0) = \mathrm{O} = (0, 0)\,, \qquad \gamma'(0) = (\pm 1, 0)$ （x 軸の向き）

としてよい. このとき，$\gamma(0)$ を出発して自己交点（原点）に戻ってくるまでの間に曲線は上半平面 $y > 0$ を通るとしてよい.（もしそうでなければ γ を $-\gamma$ で置き換えればよい.） この部分を γ_1 とおく.

はるか上方に x 軸に平行な直線をおいて，それを下方に平行移動して，γ_1 と初めてぶつかるとき，その共有点の1つをPとすると，Pにおける曲線の接ベクトルは $\pm\gamma'(0)$ である. それが $\gamma'(0)$ と一致していたとするとOからPまでの間に γ' が変化しなかったことになり，この区間で γ が直線となる（図B-2.1）. とくに，(2.1) より曲線のこの部分は x 軸に重なるが，これはPが上半平面にあることに矛盾する. したがってPにおける接ベクトルは $\gamma'(0)$ と反対の方向を向くから，OからPまでの間の γ' の回転角の変化は π である. さらにPからOに戻るまでに回転角は増加するから，γ_1 のガウス写像の回転角は π より大きくなる. γ_1 の反対側の部分についても同様の議論を行えば，回転角は π より大きくなるので，それらの和をとって γ のガウス写像の回転角は 2π を越える. これは回転数が1であることに矛盾する.



図B-2.1

□

定幅曲線　卵形線 γ 上の点 P における接線を地面と思って測った曲線の高さを，この接線に直交する方向に関する γ の**幅**という[3]．円は「すべての方向に幅が一定である」という重要な性質がある．ところが，円以外にもこのような性質をもつ卵形線(**定幅曲線**という)が無数に存在するのである．例として有名なリューロー[4]の三角形を紹介する．1 辺の長さが a の正三角形の各頂点を中心として半径 a の円弧を描き，3 つのとがった点をもつ閉曲線をつくる(図 B-2.2 左)．この曲線は，なめらかではないが，幅 a の平行曲線の間を転がりながら進むことができる．

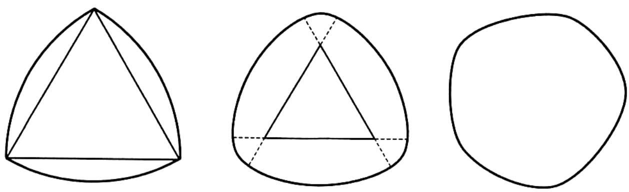


図 B-2.2
定幅曲線

さらに正三角形の各頂点を中心として，半径 $a+\varepsilon$ の円弧を描き，頂点のところには半径 ε の円を補って図 2.2 中央 のような卵形線を作れば，とがった点のない定幅曲線を作ることができる．この曲線は C^1 級であるが C^2 級ではない．この考え方をすすめれば，一般に n を奇数として，正 n 角形の各頂点を中心として，反対側にある 2 つの頂点を円弧で結ぶことで，n 個の角(かど)をもつ定幅曲線と，それを膨らませた C^1 級の定幅曲線を作ることができる．

さらに C^∞ 級の定幅曲線が無数にあることを示そう．

$$\boldsymbol{e}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{n}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

とおくと $\boldsymbol{e}(\theta)$ は x 軸の正の方向と角 θ をなす単位ベクトルであり，$\boldsymbol{n}(\theta)$ は $\boldsymbol{e}(\theta)$ に向かって左向きに直交する単位ベクトルである．周期 2π のなめらかな関数 $h(\theta)$ が $\ddot{h}+h>0$ ($\dot{}=d/d\theta$) をみたしているとする．このとき，曲線

$$\gamma(\theta) := \dot{h}(\theta)\,\boldsymbol{e}(\theta) - h(\theta)\,\boldsymbol{n}(\theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

を考えれば $\dot{\gamma} = (\ddot{h}+h)\boldsymbol{e}$ は零ベクトルではない．さらに s を曲線 γ の弧長パラメータとすれば，$ds/d\theta = \ddot{h}+h>0$，曲率は $\kappa = 1/(\ddot{h}+h)$ なので全曲率は

3）なめらかとは限らない曲線も考えたいので，その場合の接線とは，P を通る直線で γ がその一方の側にあるものとする．

4）Reauleaux, Franz (1829 - 1905).

$$\int_\gamma \kappa(\theta)\, ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

となり，γ の回転数は 1 である．また，曲率が正であるから定理 2.2 より γ は卵形線となっている．ここで $\boldsymbol{e}(\theta+\pi) = -\boldsymbol{e}(\theta)$ であるから，θ と $\theta+\pi$ における γ の接線は平行である．さらに関数 h を $h(\theta)+h(\theta+\pi)=a$（$a$ は正の定数）となるようにとれば，$\gamma(\theta)$ と $\gamma(\theta+\pi)$ を結ぶ線分は θ と $\theta+\pi$ における γ の接線に直交し，その長さは a となることがわかる．すなわち，曲線 γ は幅 a の定幅曲線となる．たとえば，

$$h(\theta) = \frac{a}{2} + \sum_{n=0}^{N} \{a_n \cos(2n+1)\theta + b_n \sin(2n+1)\theta\}$$

とおき，$\ddot{h}+h>0$ となるように係数（とくに a）を調節すれば，たくさんの定幅曲線が構成できる．図 2.2 右 の曲線は，次の式に対応する定幅曲線である：

$$h(\theta) = 35 + \cos 3\theta + \sin 5\theta\,.$$

B-3　第一基本形式と地図

§7 で述べたように，曲面上の点を uv 平面上で表現することは，uv 平面上に与えられた曲面の地図を描くことと考えられる．以下，具体的に世界地図を例にしよう．地球は，ほぼ球形をしており，世界地図を描こうとすると，ある程度高度な技術が要求される．円柱や円錐は適当に切り開くと伸び縮みなしに平面の上に重ね合わせることができるが，球面はどのように切り開いても伸び縮みなしに平面に重ね合わせることはできない．すなわち §7 の命題 7.3 の条件の意味での正確な地図を描くことはできない．そのために，ある性質を犠牲にすることで，目的に応じて，さまざまな地図が作られた．ここではそのうちいくつかを紹介しよう．簡単のため地球は原点を中心とする半径 1 の球面とする[5]．

5）　地球は，半径約 6400 km の球と思うことができる．この値は，本来，長さの単位「メートル」を定義する際に，北極から赤道までの子午線の長さの 1 千万分の 1 を用いたことによる．（現在では，メートルは真空中の光の速さを用いて定義されている．）

円柱への展開　世界地図をつくるとき，緯線・経線が互いに直交するような地図を作るのにはどうしたらよいか．自然な方法の 1 つは，赤道で球面に外接する半径 1 の円柱を考え，球面の経線を，赤道でこの経線に接する円柱の母線に対応させる方法である．球面上の点 (x, y, z) の経度を u，緯度を v とすると

$$x = \cos u \cos v\,, \quad y = \sin u \cos v\,, \quad z = \sin v$$

$$\left(-\pi < u < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right)$$

で表されるが，この uv 平面上に球面上の点を対応させてできる地図は，ちょうど経線の長さが保たれるように球上の点を円柱に展開し，そのあとで円柱を縦に切り開いてできる地図にほかならない（図 B-3.1）．この地図では，緯線の長さは極に近づくにつれて長くなってしまう．この座標系で，球面の第一基本形式は

(3.1) $$ds^2 = (\cos^2 v)\,du^2 + dv^2$$

と表される．dv^2 の係数が 1 であることは，この地図が経線の長さを正確に表していることを意味している．

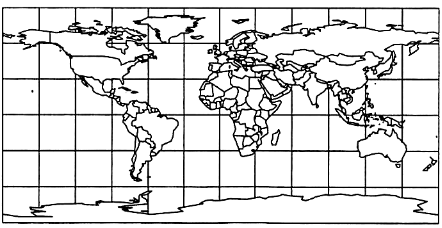


図 B-3.1　円柱への展開

メルカトルの地図　上述の円柱地図の欠点は，赤道から離れるにつれて縦横の長さの比が違ってしまう点にある．もし，

(3.2) $$dv = \cos v\, d\eta$$

となるような関数 $\eta = \eta(v)$ があれば，新しい座標系 (ξ, η) を

$$\xi = u\,, \qquad \eta = \eta(v)$$

ととれば，第一基本形式は

$$ds^2 = \cos^2 v\,(d\xi^2 + d\eta^2)$$

となり，縦横の比が一致する．関係式 (3.2) をみたす η は

$$\eta = \int_0^v \frac{dt}{\cos t} = \log\left(\frac{\cos v}{1 - \sin v}\right) = \log\left(\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

と求められる．これより

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2 \eta}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

が得られる(節末問題の **1** 参照)．$\xi\eta$ 平面を地図と思うとき，これを**メルカトルの地図**とよぶ(図 B-3.2)．地図上の点 (ξ, η) に対応する球面上の点の座標は

$$\left(\frac{\cos \xi}{\cosh \eta}, \frac{\sin \xi}{\cosh \eta}, \tanh \eta\right) \qquad (-\pi < \xi < \pi,\ -\infty < \eta < \infty)$$

となる．この地図(座標系)に関する第一基本量は $E = G$, $F = 0$ をみたしているので，§7 の (7.15) より地図上の角度は実際の角度と一致することがわかる．すなわち，航海中の船上で羅針盤の北極の向きと進路がなす角度は，メルカトルの地図上で航路が経線となす角の大きさと一致する．一方，$\lim_{u \to \pm\pi/2} \eta = \pm\infty$ なので，この地図では北極と南極は限りなく遠い所へいってしまう．メルカトルの地図は大航海時代以来，海図として広く用いられている．

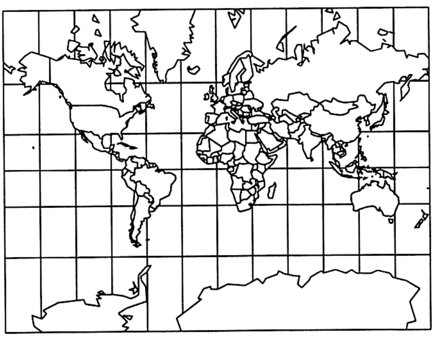


図 B-3.2　メルカトルの地図

正積地図　球から円柱への対応において，やはり球面の経線は円柱の母線に，緯線は円柱の緯線に対応させるのだが，その際，対応する円柱上の緯線の赤道面からの高さ ζ を球面の緯線の高さ $\sin v$ に等しくする．すると

$$\xi = u, \qquad \zeta = \sin v$$

なる座標変換が得られるが，この座標変換を行うと $d\zeta = (\cos v)\, dv$ となるから

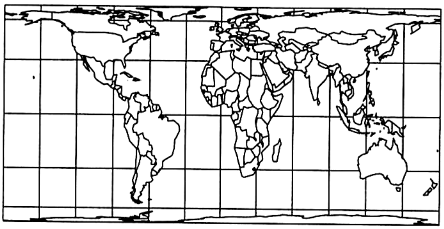
$$ds^2 = (\cos^2 v)\, du^2 + dv^2 = (\cos^2 v)\, d\xi^2 + \frac{1}{\cos^2 v} d\zeta^2$$

$$= (1 - \zeta^2)\, d\xi^2 + \frac{1}{1 - \zeta^2} d\zeta^2$$

が成立する．このとき，(ξ, ζ) に対応する球面上の点の座標は

$$(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\xi,\ \sqrt{1-\zeta^2}\sin\xi,\ \zeta) \qquad (-\pi<\xi<\pi,\ -1<\zeta<1)$$

となる．とくに，地球に赤道で接するような円筒をおき，北極と南極を結ぶ直線（地軸）に細長い光源をおいて地球を円筒に投影した後に円筒を切り開いて得られる地図がこれである．このとき，第一基本量は $\sqrt{EG-F^2}=1$ をみたすので，§7の (7.11) により，この地図では球面上の領域の面積と対応する $\xi\zeta$ 平面上の領域の面積は一致する（図B-3.3）．一方，極付近では縦横の比率が大きく異なるという欠点をもつ．このように，面積を正確に表す地図を**正積地図**という．正積地図にはこのほかにもいろいろな描き方がある．



図B-3.3　正積地図

立体射影　原点を中心とする単位球面上の北極以外の点をPとする．北極からPへ引いた半直線と xy 平面との交点をQとするとき，点Pを交点Qに対応させる写像 $\pi: \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}$ を**立体射影**という（図B-3.4左）．立体射影によって球面上の点 (x, y, z) が $(X, Y, 0)$ に写るとすると，定義より

$$X=\frac{x}{1-z}, \qquad Y=\frac{y}{1-z}$$

となる．ここで，$x^2+y^2+z^2=1$ に注意すれば，

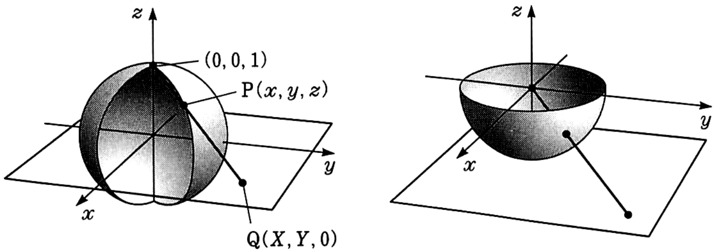
$$x=\frac{2X}{1+X^2+Y^2}, \quad y=\frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, \quad z=\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}$$

を得るから，$p(X, Y)=(x, y, z)$ の第一基本量を計算して

$$ds^2=\frac{4}{(1+X^2+Y^2)^2}(dX^2+dY^2)$$

となる．この XY 平面を地図と思うと，第一基本量は $E=G$，$F=0$ をみたすので，これはメルカトルの地図と同様に角度を正確に表す．また，この対応で球面の円は平面上の円，または直線に写される．この対応は複素平面に無限遠点を付け

加えたものを球面と同一視するときに用いられる.



立体射影　　中心射影　　図 B-3.4

中心射影　原点を中心とする単位球面上の南半球の点を，原点から射影して南極における球の接平面上の点に対応させる写像を中心射影という(図 B-3.4 右). このようにして作った地図は，角度も面積も保存しないが，大円(単位球面と，原点を通る平面の共通部分として得られる曲線)を直線に写す(節末問題の **4** 参照). とくに地図上の 2 点を結ぶ直線は，球面上の最短線になっているので，最短航路を見いだすのに便利である.

また，中心射影は射影平面の現実的モデルを提供している. このとき，直線は，赤道以外の大円の南半球に含まれる部分に対応し，赤道を対蹠点(たいせきてん)で同一視したものが無限遠直線となる.

問　題

1. メルカトルの地図に対応する第一基本形式は，ξ, η のみを用いて

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2\eta}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

と書けることを示せ.

2. 輪環面(練習問題 6 の **1**)の正積地図を作れ.

3. 錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ の助変数を変更し，長さと角度が正確な地図を作れ.

4. 中心射影によって大円が直線に写ることを示せ.

B-4 $K=0$ となる曲面

ガウス曲率 K が恒等的に 0 となる曲面のことを**平坦な曲面**とよぶ．平坦な曲面は，局所的に正確な地図が作れる，つまり $E=G=1$，$F=0$ となる曲面の助変数表示が存在する（補題 14.2）．一方，§10 (99 ページ)で述べたように，球面のようなガウス曲率が 0 でない曲面については正確な地図を作ることはできない．それでは $K=0$ となる曲面は，平面，円錐面，円柱面以外にあるだろうか．

線織面　たとえば，下敷きを手でたわませると伸び縮みしないで曲面ができる．これは平坦な曲面のもっとも単純な例である．このように直線の連続的運動によってつくられる曲面を**線織面**といい，曲面を形づくる直線の族を**母線**という．以下に示すように線織面の中に平坦な曲面の大部分を見いだすことができる．

空間曲線 $\gamma(u)$ が与えられたとき，その曲線の各点 $\gamma(u)$ を始点とし，変数 u になめらかに依存する 0 でないベクトル $\xi(u)$ ともう一つのパラメータ v を与えて

$$p(u,v):=\gamma(u)+v\xi(u) \tag{4.1}$$

という形で表される曲面が線織面である．たとえば双曲放物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ は二通りの方法で以下のように線織面として表示される：

$$p(u,v)=(au,0,u^2)+v(a,\pm b,2u)\,.$$

また，一葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ も以下のように二通りの方法で線織面として表示される（図 B-4.1）：

$$p(u,v)=(a\cos u,b\sin u,0)\pm v(-a\sin u,b\cos u,c)\,.$$

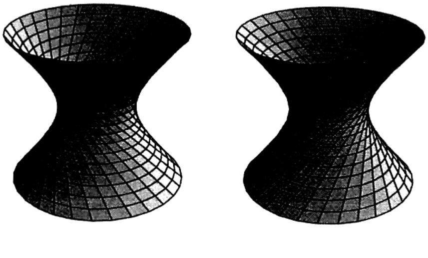


図 B-4.1　線織面としての双曲面

可展面　線織面のうち，ガウス曲率 K が恒等的に 0 となるものを**可展面**という．すぐあとで，このような曲面の正確な地図を描くことができることを示す．

線織面が可展面になるための必要十分条件を求めよう．式 (4.1) で与えられる線織面を考える．まず，

$$p_u = \dot{\gamma} + v\dot{\xi}, \qquad p_v = \xi \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{du} \right)$$

となり，さらに

$$p_{uu} = \ddot{\gamma} + v\ddot{\xi}, \qquad p_{uv} = \dot{\xi}, \qquad p_{vv} = 0$$

を得る．曲面の単位法線ベクトルを $\nu(u, v)$ とすると，第二基本量は，

$$L = p_{uu}\cdot\nu, \quad M = p_{uv}\cdot\nu = \dot{\xi}\cdot\nu, \quad N = p_{vv}\cdot\nu = 0$$

と表されるので，

$$(EG - F^2)K = LN - M^2 = -M^2 = -(\dot{\xi}\cdot\nu)^2$$

となる．この式は，線織面のガウス曲率が 0 以下であることを表している．一方，

$$\dot{\xi}\cdot\nu = \frac{\dot{\xi}\cdot(p_u \times p_v)}{|p_u \times p_v|} = \frac{\det(\dot{\xi}, p_u, p_v)}{|p_u \times p_v|} = \frac{\det(\dot{\xi}, \dot{\gamma}, \xi)}{|p_u \times p_v|}$$

なので，線織面が可展面になるための必要十分条件は $\dot{\xi}\cdot\nu = 0$，すなわち

$$\det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = 0 \tag{4.2}$$

で与えられる．この条件を用いて次の定理を示すことができる．

定理 4.1　以下の 3 つの線織面は可展面である．逆に一般の可展面は，これらをなめらかに継ぎ合わせた形をしている[6]．

錐面：　1 定点を通る直線でつくられる曲面．代表的なものに円錐がある．

柱面：　平行な直線でつくられる曲面．代表的なものに平面，円柱面がある．

接線曲面：　空間曲線 $\gamma(t)$ に対し，$p(u, v) = \gamma(u) + v\dot{\gamma}(u)$ で表される曲面[7]．

［**証明**］　式 (4.1) で表された線織面を考える．一般性を失うことなく $|\xi| = 1$

6）　厳密にいうなら，曲面上の稠密な開部分集合が存在して，その各連結成分はこれら 3 つのいずれかになる．

7）　この形の曲面は $v = 0$ で曲面の条件（§6 の (6.7)）をみたさない．すなわち曲線 $\gamma(u)$ 上の点では曲面を与えないが，$v \neq 0$ ならば§6 の (6.7) が成り立つ．

としてよい．必要十分条件 (4.2) と，同時には 0 にならない u だけの関数 $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ が存在して

$$a\,\dot{\gamma}+b\xi+c\,\dot{\xi}=0 \tag{4.3}$$

が成り立つこととは同値である．まず，ある開区間で $a(u)=0$ となる場合を考えると，この区間上で

$$b\xi+c\,\dot{\xi}=0$$

が成り立つ．ξ は単位ベクトルだから，$\dot{\xi}\cdot\xi=0$ なので，上の式の両辺に ξ を内積すると $b=0$ を得る．よって $c\,\dot{\xi}=0$ となるが，b, c は同時には 0 にならないので $c\neq 0$，とくに $\dot{\xi}=0$ を得る．すなわち ξ は定ベクトルであり，この場合は柱面になる．逆に柱面なら $\dot{\xi}=0$ だから (4.2) が自動的にみたされる．

次にある開区間で $a(u)\neq 0$ となる場合を考える．天下り的ではあるが，

$$\sigma(u):=\gamma(u)+\frac{c(u)}{a(u)}\,\xi(u)$$

とおくと，

$$p(u,v)=\sigma(u)+r\,\xi(u) \qquad \left(r=v-\frac{c(u)}{a(u)}\right) \tag{4.4}$$

と書き直すことができる．このとき，

$$\dot{\sigma}=\frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)\xi+\frac{1}{a}\,(a\,\dot{\gamma}+c\,\dot{\xi})$$

であるから，(4.3) より

$$\dot{\sigma}=e\xi \qquad \left(e:=\frac{d}{du}\left(\frac{c}{a}\right)-\frac{b}{a}\right) \tag{4.5}$$

となる．式 (4.5) において恒等的に $e=0$ となる開区間が存在するならば，その区間で $\sigma(u)$ は一定である．したがって (4.4) は

$$p(u,v)=\mathrm{P}+r\,\xi(u) \qquad \left(\mathrm{P}=\sigma(u),\ \ r=v-\frac{c(u)}{a(u)}\right)$$

と書けるが，これは P を頂点とする錐面となる．

一方，e が 0 でない開区間があれば，そこで $\sigma(u)$ は曲線となり，ξ が曲線 $\sigma(u)$ の接ベクトルに比例していることがわかる．よって曲面は u, r をパラメータに取り直すことにより，曲面は接線曲面であることがわかる．

逆に錐面ならば $\gamma(u)$ をその頂点（定点）とすれば $\dot{\gamma}=0$ であるし，接線曲面については，ξ と $\dot{\gamma}$ が比例するから (4.2) をみたすことは明らかである． □

可展面の展開可能性　一般に $K=0$ となる曲面は，局所的には(§7で述べた意味で)正確な地図を作ることができる．その特別な場合として，ここでは可展面に対してこのことを示す．この事実はB-6で用いられる．

まず線織面 (4.1)

$$p(u,v)=\gamma(u)+v\xi(u)$$

において $|\dot\gamma|=1$, $|\xi|=1$ であるとして一般性を失わない．また，$\dot\gamma$ と ξ は一次独立であるとしてよい．このとき，次のようにすれば正確な地図を作ることができる： 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(u)$ の測地的曲率[8] を $\kappa_g(u)$ とするとき，弧長をパラメータとし，$\kappa_g(u)$ を曲率関数とする平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の曲線 $\sigma(u)$ が存在する(§2の定理2.9)．

ベクトル $\dot\gamma(u)$ と $\xi(u)$ のなす角を $\theta(u)$ として(正確な定義はあとの (4.7) 式で与える)，平面上の $\dot\sigma(u)$ と角 $\theta(u)$ をなす単位ベクトル $\eta(u)$ をとり，座標 (u,v) に対して平面上の点を対応させる写像

$$q(u,v):=\sigma(u)+v\eta(u) \tag{4.6}$$

を考えれば，曲面上の点 $p(u,v)$ から平面上の点 $q(u,v)$ への写像が得られる．この写像は曲面から平面への1対1の写像になるとは限らない．しかし，曲面上の十分小さい領域はこの写像により平面上の領域に1対1に写される[9]．

こうして与えられる写像が長さを保つことを示そう．$\boldsymbol{n}_g$ を，$\dot\gamma$ に左向きに直交する曲面の単位接ベクトルとすると，$\{\dot\gamma,\xi\}$ は一次独立だから ξ は

$$\xi=(\cos\theta)\dot\gamma+(\sin\theta)\boldsymbol{n}_g \qquad (\sin\theta\neq 0) \tag{4.7}$$

と表すことができる．$p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν とすると，測地的曲率 κ_g，法曲率 κ_n の定義より

$$\ddot\gamma=\kappa_g\boldsymbol{n}_g+\kappa_n\nu$$

---

8) 弧長をパラメータとする曲面上の曲線 $\gamma(u)$ の点 $\mathrm{P}=\gamma(u)$ における速度ベクトル $\dot\gamma$ に対して，左向きに直交する曲面の単位接ベクトル $\boldsymbol{n}_g$ をとる．いま，γ の測地的曲率ベクトル $\boldsymbol{\kappa}_g$(すなわち $\ddot\gamma$ の曲面に接する方向の成分，§9参照)は $\dot\gamma$ に直交する．したがって $\boldsymbol{\kappa}_g=\kappa_g\boldsymbol{n}_g$ と書ける．この κ_g が γ の**測地的曲率**である．

9) この対応によって，曲面上の曲線 $\gamma(u)$ を平面上の曲線 $\sigma(u)$ に伸び縮みなしに重ねることができるが，それにともなって，母線を σ と角 θ をなして交わる直線に，すだれを広げるように重ねられることがわかる．「可展面」の名はこの対応に由来する．

が成り立つ．また $\{\dot{\gamma}, \boldsymbol{n}_g, \nu\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正の正規直交基底を与えているから，$\dot{\boldsymbol{n}}_g$ はこれらの一次結合で表されるが，$|\boldsymbol{n}_g| = 1$ と $\boldsymbol{n}_g \cdot \dot{\gamma} = 0$ より

$$\dot{\boldsymbol{n}}_g = -\kappa_g \dot{\gamma} + (\dot{\boldsymbol{n}}_g \cdot \nu)\nu$$

が成り立つ．これを用いて (4.7) を微分すると

$$\dot{\xi} = -\sin\theta\,(\dot{\theta} + \kappa_g)\,\dot{\gamma} + \cos\theta\,(\dot{\theta} + \kappa_g)\,\boldsymbol{n}_g + \{\kappa_n \cos\theta + (\dot{\boldsymbol{n}}_g \cdot \nu)\sin\theta\}\nu$$

を得る．ここで可展面の条件 (4.2) から，$\det(\dot{\gamma}, \boldsymbol{n}_g, \nu) = 1$ に注意して

$$0 = \det(\dot{\gamma}, \xi, \dot{\xi}) = \sin\theta\{\kappa_n \cos\theta + (\dot{\boldsymbol{n}}_g \cdot \nu)\sin\theta\}$$

であるが，$\sin\theta \neq 0$ なので，$\dot{\xi}$ の ν 方向の成分は 0 にならなければならないから

$$\dot{\xi} = (\dot{\theta} + \kappa_g)\{(-\sin\theta)\,\dot{\gamma} + (\cos\theta)\,\boldsymbol{n}_g\}.$$

これを用いると

$$p_u = \dot{\gamma} + v(\dot{\theta} + \kappa_g)\{(-\sin\theta)\,\dot{\gamma} + (\cos\theta)\,\boldsymbol{n}_g\},$$
$$p_v = \xi = (\cos\theta)\,\dot{\gamma} + (\sin\theta)\,\boldsymbol{n}_g$$

となるので，p の第一基本量は

(4.8)　$$E = p_u \cdot p_u, \qquad F = p_u \cdot p_v, \qquad G = p_v, p_v$$

となる．

一方，$\sigma(u)$ は曲率関数 $\kappa_g(u)$ をもつ平面曲線だったから，その左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，フルネの公式(§2 の (2.12))より

$$\ddot{\sigma} = \kappa_g \boldsymbol{n}, \qquad \dot{\boldsymbol{n}} = -\kappa_g \dot{\sigma}$$

が成り立つ．とくに先に与えた平面の単位ベクトル η は

$$\eta := (\cos\theta)\,\dot{\sigma} + (\sin\theta)\,\boldsymbol{n}$$

と書ける．したがって (4.6) で与えられた $q(u, v)$ に対しフルネの公式より

$$q_u = \dot{\sigma} + v\,\dot{\eta} = \dot{\sigma} + v(\dot{\theta} + \kappa_g)\{(-\sin\theta)\,\dot{\sigma} + (\cos\theta)\,\boldsymbol{n}\},$$
$$q_v = \xi = (\cos\theta)\,\dot{\sigma} + (\sin\theta)\,\boldsymbol{n}$$

が成り立つから，(4.8) の E, F, G を用いて

$$q_u \cdot q_u = E, \qquad q_u \cdot q_v = F, \qquad q_v \cdot q_v = G$$

が成り立つ．よって，可展面上の任意の曲線 $p(u(t), v(t))$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さを l とすると

$$l = \int_a^b \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\,dt = \int_a^b |q_u\,\dot{u} + q_v\,\dot{v}|\,dt$$

であるが，これは対応する平面曲線 $q(u(t), v(t))$ の長さに等しい．すなわち，ここで与えた対応は長さを保つ．

一般の平坦な曲面　一般の平坦な(ガウス曲率が0であるような)曲面も錐面，柱面，接線曲面の断片をなめらかに継ぎ合わせた形をしていることが知られている．しかし，平坦な曲面で線織面でないものが存在する(たとえば[3]の63ページ参照)．

B-5　曲率線座標と漸近線座標

曲率線　各点で速度ベクトルが主方向を向くような曲面上の曲線を**曲率線**という．曲率線は曲面のもっとも曲がり方が際立った方向を走る曲線だから，曲率線で曲面に網を張りめぐらせると，曲面の相対的なひずみ具合をもっともよく表現する曲面の助変数表示が得られる．

定理 5.1　曲面上の臍点でない点の近くでは，u 曲線，v 曲線が曲率線であるような助変数がとれる．この助変数を**曲率線座標**という．この助変数表示では

$$F = M = 0 \tag{5.1}$$

が成り立つ．逆に曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が (5.1) をみたせば，(u, v) は曲率線座標である．

［**証明**］ 曲率線座標の存在は197ページで示す．ここでは，曲率線座標 (u, v) による助変数表示 $p(u, v)$ について $F = M = 0$ が成り立つことを示そう．まず，§9の定理9.6より p_u と p_v は直交するから，$F = 0$ である．曲率線座標による助変数表示では，u 方向と v 方向が主方向なので，§9の命題9.2で $\theta = 0, \pi/2$ として

$$\lambda_1 = \frac{L}{E}, \qquad \lambda_2 = \frac{N}{G}$$

が主曲率である．ガウス曲率の定義と主曲率との関係式(§9の (9.8))を合わせて

$$\frac{LN}{EG} = \lambda_1\lambda_2 = K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{EG}$$

が成り立つから，$M = 0$ が示された．

逆に $F = M = 0$ とすると，§9 の (9.8) より

$$\lambda_1 = \frac{L}{E}, \qquad \lambda_2 = \frac{N}{G}$$

となる．また，§9 の命題9.2から，uv 平面で u 軸と角度 θ をなす方向の法曲率は，

$$\kappa_n = \frac{L\cos^2\theta + N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta + G\sin^2\theta}$$

となるので，ちょうど u, v 軸の方向の法曲率が λ_1, λ_2 に一致することがわかり，この助変数表示が曲率線座標を与えていることが示された． □

曲率線について次の定理が成り立つ．

定理 5.2 曲面 $p(u, v)$ 上の s を助変数とする曲線 $\gamma(s)$ が曲率線であるための必要十分条件は，この曲線に沿う曲面 p の法線がつくる線織面

$$q(s, t) = \gamma(s) + t\,\nu(s)$$

のガウス曲率が 0，すなわち可展面となることである．ここで $\nu(s)$ は曲面 p の点 $\gamma(s)$ における単位法線ベクトルである．

［**証明**］ 曲線 $\gamma(s)$ は弧長をパラメータとして一般性を失わない．190 ページで与えた条件 (4.2) より，曲面 q のガウス曲率が 0 となるための必要十分条件は

$$\det(\gamma', \nu, \nu') = 0$$

が成り立つことである．これは

$$(5.2) \qquad a\gamma' + b\nu + c\nu' = 0 \qquad ((a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

となる関数 $(a(s), b(s), c(s))$ が存在することと同値である．(5.2) 式に ν を内積すると，$b = 0$ であることがわかる．もしも $c = 0$ とすると $\gamma' = 0$ となり，弧長がパラメータであることに反するから $c \neq 0$．また $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ とおいて (5.2) に p_u を内積すると，$b = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} 0 &= p_u\cdot(a\gamma' + c\nu') \\ &= ap_u\cdot(p_u u' + p_v v') + cp_u\cdot(\nu_u u' + \nu_v v') \\ &= (aE - cL)\,u' + (aF - cM)\,v'. \end{aligned}$$

同様に p_v と内積をとると $(aF - cM)\,u' + (aG - cN)\,v' = 0$ となるから，$c \neq 0$ に注意して線織面 $q(s, t)$ のガウス曲率が 0 となるための必要十分条件は

$$\left(L - \frac{a}{c}E\right)u' + \left(M - \frac{a}{c}F\right)v' = 0, \qquad \left(M - \frac{a}{c}F\right)u' + \left(N - \frac{a}{c}G\right)v' = 0$$

で与えられる．§9 の (9.6) よりこの式は a/c が主曲率で，対応する主方向が (u', v') であることと同値である． □

このことと B-4 で述べた，線織面が可展面となるための条件 (4.2) をあわせて，次を得る．

系 5.3 曲面上の曲線 $\gamma(t)$ が曲率線となるための必要十分条件は

$$\det(\dot{\gamma}, \nu, \dot{\nu}) = 0 \tag{5.3}$$

が曲線上の各点で成り立つことである．ただし，$\nu = \nu(s)$ は，曲面上の点 $\gamma(s)$ における曲面の単位法線ベクトルである．

曲線のパラメータ s が弧長でなくても (5.3) は曲率線であるための条件を与えている．この式は**曲率線の微分方程式**とよばれる．

漸近線 すべての点で速度ベクトルが漸近方向（88 ページ参照）を向くような曲面上の曲線を**漸近線**という．とくに，曲面が直線を含むと，その法曲率と測地的曲率はともに 0 だから，この直線は漸近線である．漸近線で曲面に網をめぐらせる助変数表示を考えよう．

定理 5.4 曲面上の双曲点，すなわち $K < 0$ となる点の近くでは，u 曲線，v 曲線が漸近線であるような助変数をとることができる．これを**漸近線座標**という．この助変数表示では

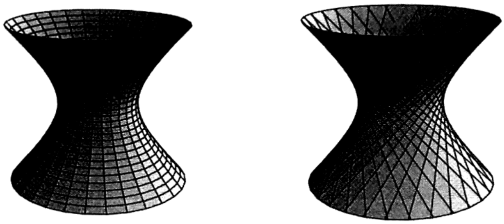
$$L = N = 0 \tag{5.4}$$

が成り立つ．逆に (5.4) をみたす曲面の助変数表示は漸近線座標になる．

［**証明**］ 漸近線座標の存在は，曲率線座標の存在と一緒にすぐあとで示す．曲面の助変数表示 $p(u, v)$ が与えられたとき，§9 の命題 9.2 より u 方向，v 方向の法曲率をそれぞれ κ_1, κ_2 とすると，

$$\kappa_1 = \frac{L}{E}, \qquad \kappa_2 = \frac{N}{G}$$

となる．u, v 方向が漸近方向であることは $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ を意味するが，$EG \neq 0$ だから，これは $L = N = 0$ であることと同値である． □



曲率線座標　　漸近線座標

図 B-5.1

上の図 B-5.1 は同じ曲面に，それぞれ曲率線と漸近線で網を張りめぐらせたものである．2 つの座標系の表示から受ける印象の違いを読者自ら感じとってほしい．

曲率線座標・漸近線座標の存在　ここでは定理 5.1, 5.4 における曲率線座標・漸近線座標の存在の証明を与える．

曲面上の各点に曲面に接するベクトルが与えられているとき，これを曲面上の**ベクトル場**という．曲面の助変数表示 $p(u,v)$ が与えられたとき，点 $p(u,v)$ における曲面の接ベクトルは $p_u(u,v)$ と $p_v(u,v)$ の一次結合で表されるから，曲面上のベクトル場 X は

(5.5) $$X = X(u,v) = U(u,v)\,p_u(u,v) + V(u,v)\,p_v(u,v)$$

の形に表すことができる．ここで，U, V は (u,v) の関数である．

補題 5.5　曲面上の 0 にならないベクトル場 X が与えられたとき，曲面上の任意の点 P の近傍の新しい座標系 (ξ,η) で，ξ 曲線が各点で X に接するものが存在する．

［**証明**］　曲面が $p = p(u,v)$ と助変数表示されているとして $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ とおく．また，ベクトル場 X は (5.5) のように表示されているとする．uv 平面上の曲線 $\gamma(\eta) = (u(\eta), v(\eta))$ を $\gamma(0) = (u_0, v_0)$ かつ $\dot{\gamma}(0)$ は $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $(U(u_0, v_0), V(u_0, v_0))$ と一次独立になるようにとる．このとき，ξ を独立変数とした常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\xi} = U(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)), \qquad \dfrac{dv}{d\xi} = V(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)), \\ (u(0, \eta), v(0, \eta)) = \gamma(\eta) \end{cases}$$

を考えると，十分小さい正の数 δ, ε が存在して，$|\eta| < \delta$ なる η に対して，この方程式の解は $|\xi| < \varepsilon$ の範囲で一意的に存在し，$u(\xi, \eta)$，$v(\xi, \eta)$ は ξ と η に関して微分可能である（A-2 の定理 2.1）．さらに，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}(0,0),\ \frac{\partial v}{\partial \xi}(0,0)\right) = (U(u_0, v_0),\ V(u_0, v_0)),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,0),\ \frac{\partial v}{\partial \eta}(0,0)\right) = \dot{\gamma}(0)$$

であるが，これらは一次独立であるから，逆関数定理（A-1 の定理 1.4）から，写像 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ は微分同相となり，(u_0, v_0) の近傍で逆写像をもつ．したがって，(ξ, η) は曲面の P の近傍における座標系を与える．さらに，

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial p}{\partial v} = Up_u + Vp_v = X$$

であるから，ξ 曲線は X に接する．　□

この補題 5.5 から次がわかる．

補題 5.6　曲面上の 2 つのベクトル場 X, Y が各点で一次独立であるとする．このとき，曲面上の任意の点 P の近傍の新しい座標系 (ξ, η) で ξ 曲線が X に接し η 曲線が Y に接するものが存在する．

[証明]　補題 5.5 をベクトル場 X に適用すると，P の近傍の座標系 (ξ_1, η_1) で ξ_1 曲線が X に接するものが存在する．同様に P の近傍の座標系 (ξ_2, η_2) で ξ_2 曲線が Y に接するものがとれる．とくに補題 5.5 の証明から P の十分近くでは η_1 曲線と η_2 曲線の接ベクトルは一次独立になるようにとれる[10] ので (η_2, η_1) は座標系を与える．この座標系の η_2 曲線は $\eta_1 =$ 一定 で与えられる曲線であるが，これは座標系 (ξ_1, η_1) の ξ_1 曲線であるから X に接する．同様に η_1 曲線は Y に接するので，$(\xi, \eta) = (\eta_2, \eta_1)$ が求める座標系である．　□

10）補題 5.5 の証明で η 曲線の方向は曲線 γ の接ベクトルの方向となるが，この取り方は自由である．

［曲率線座標の存在の証明］ 臍点以外の点では 2 つの主曲率の値は異なるから，行列

$$\begin{pmatrix} L-\lambda_j E & M-\lambda_j F \\ M-\lambda_j F & N-\lambda_j G \end{pmatrix} \qquad (j=1,2)$$

の階数は 1 となる．よって $(L-\lambda_j E, M-\lambda_j F)$ または $(M-\lambda_j F, N-\lambda_j G)$ のいずれかは零ベクトルではない．ここで，2 つのベクトル場

$$X_1 = (-M+\lambda_1 F)\,p_u + (L-\lambda_1 E)\,p_v\,,$$
$$X_2 = (-N+\lambda_1 G)\,p_u + (M-\lambda_1 F)\,p_v$$

を考えると，点 P において X_1 と X_2 の少なくとも一方は零ベクトルではない．そこで 0 でない方を X とすると § 9 の (9.6) よりこれは P の近傍で主曲率 λ_1 に対応する主方向を与える．同様に

$$Y_1 = (-M+\lambda_2 F)\,p_u + (L-\lambda_2 E)\,p_v\,,$$
$$Y_2 = (-N+\lambda_2 G)\,p_u + (M-\lambda_2 F)\,p_v$$

のうち零ベクトルでない方を Y とすれば，これは λ_2 に対応する主方向を与える．この X, Y に対して補題 5.6 を適用して得られる座標系が曲率線座標である． □

［漸近線座標の存在の証明］ 曲率が負であるような曲面上の点 P において，必要なら座標系を取り換えることによって，$L \neq 0$ とすることができる．実際，$L=0$ かつ $N \neq 0$ なら (u, v) の代りに $(v, -u)$ をとればよい．また，$L=N=0$ ならば，(u, v) の代りに $(u-v, u+v)$ をとれば $L \neq 0$ とすることができる．このとき，漸近方向 (α, β) は

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 = \frac{1}{L}\{(L\alpha+M\beta)^2 + (LN-M^2)\,\beta^2\} = 0$$

をみたすから，$LN-M^2=-k^2$ とおけば $(-M\pm k, L)$ が漸近方向となる．これに対して

$$X = -(M+k)\,p_u + Lp_v\,,$$
$$Y = -(M-k)\,p_u + Lp_v$$

とおいて曲率線座標と同様のことを行えば漸近線座標の存在が示せる． □

補題 5.6 のもう一つの応用として§ 3 の定理 3.4 の証明で用いられた，角(かど)のある曲線をなめらかに丸めることができるという事実を示そう．

命題 5.7　2 つの平面曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ が点 $\mathrm{P} = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ で接することなく交わっているとする．このとき，角をなめらかに(C^∞ 曲線として)丸めることができる．

[証明]　曲線 $\gamma_1(s)$ を $\dot{\gamma}_2(0)$ 方向に平行移動した曲線族を考え，この曲線族の単位接ベクトルがつくる P の近傍で定義されたベクトル場を X とする．同様に曲線 $\gamma_2(s)$ を $\dot{\gamma}_1(0)$ 方向に平行移動した曲線族を考え，この単位接ベクトルがつくるベクトル場を Y とする．この X, Y に補題5.6を適用してできる座標系 (ξ, η) を考えると，この座標系においては原点が P で ξ 軸が γ_1 に，η 軸が γ_2 に対応する．よってこの 2 つの直交座標軸を原点のところで丸めることができれば，それを元の座標系で表すことにより求める曲線が得られたことになる．直交する 2 つの半直線の角を丸めることを示そう(図 B-5.2 右)．まず，

$$\varphi(x) := \begin{cases} \left(\int_0^x e^{\frac{1}{u^2-1}}\, du\right) \Big/ \left(\int_0^1 e^{\frac{1}{u^2-1}}\, du\right) & (|x| < 1), \\ x/|x| & (|x| \geqq 1) \end{cases}$$

とおく(図 B-5.2 左)．被積分関数は § 10 の定理 5.5 の証明(94 ページ)で用いた関数 ρ の $c = 0$，$\delta = 1$ としたものである．さらに

$$f(x) = -\int_{-1}^{x} \varphi(u)\, du$$

とすれば $f(x)$ は，直交する線分の角を丸めた曲線を与える(図 B-5.2 右 の太線)．この図形に相似変換をほどこすことにより，いくらでも角に近い部分を丸めることができる．　□

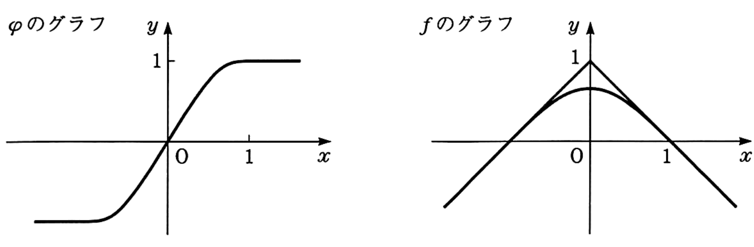


図 B-5.2

B-6 H が一定の曲面と K が一定の曲面との関係

ここでは，ガウス曲率 K が正で一定である曲面から平均曲率 H が一定の曲面が得られること，逆に平均曲率が 0 でない定数である曲面からガウス曲率一定の曲面が得られることを示したい．まず，準備として平面曲線の性質をあげる．弧長によってパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s)$ の左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(s)$，曲率を $\kappa(s)$ とおく．このとき，ある定まった実数 t (パラメータとは考えない) に対して次のようにおく：

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + t\,\boldsymbol{n}(s)\,.$$

これを $\gamma(s)$ の**平行曲線**とよぶ．$\tilde{\gamma}$ の曲率を $\tilde{\kappa}$ とおけば，次が成り立つ：

(6.1)
$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{\kappa} - t\,.$$

実際，$\tilde{\gamma}(s)$ の単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}(s)$ となり $\gamma(s)$ の法線ベクトルと一致するから，2 つの曲線の法線がつくる包絡線は一致する．この包絡線は曲線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ の縮閉線，すなわち曲率円の中心の軌跡と一致する (B-1 を参照せよ)．ここで γ と $\tilde{\gamma}$ の曲率円の半径の差は t であるから (6.1) が成り立つことがわかる．式 (6.1) はフルネの公式と § 2 の (2.7) 式を用いれば，直接計算でも示せる．

同様に曲面 $p(u,v)$ に対して，その法線方向に一定の距離 t だけ移動した曲面

(6.2)
$$\tilde{p}(u,v) := p(u,v) + t\,\nu(u,v)$$

を $p(u,v)$ の**平行曲面**という．平行曲面は，曲面であるための条件(§ 6 の (6.7))をみたさない点を含む場合がある．このような点を平行曲面の**特異点**とよぶ．曲面の場合，式 (6.1) に相当する次のことが成り立つ．

定理 6. 1 曲面 p に対して式 (6.2) で与えられる曲面 $\tilde{p}$ の主曲率 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ は，p の主曲率 λ_1, λ_2 を用いて次のように表される：

(6.3)
$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_j} = \frac{1}{\lambda_j} - t \qquad (j = 1, 2)\,.$$

とくに $\tilde{p}$ のガウス曲率 $\tilde{K}$ と平均曲率 $\tilde{H}$ は p のガウス曲率 K と平均曲率 H を用いて次のように表される：

$$\tilde{K} = \frac{K}{1 - 2tH + t^2K}, \qquad \tilde{H} = \frac{H - tK}{1 - 2tH + t^2K}.$$

[**証明**] この定理は，曲率線座標を用いて直接的な計算によっても示すことができるが，ここでは (6.1) との類似に注目して以下のように幾何学的な証明を与える．

まず $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルは ν (を平行移動したもの)に一致する．いま $p(u,v)$ 上の点Pを通る曲率線 $\gamma(s)=p(u(s),v(s))$ を考える．ただし，s は弧長パラメータで $\gamma(0)=\mathrm{P}$ とする．B-5 の定理 5.2 より，この曲線に沿った線織面

$$q(s,w):=\gamma(s)+w\nu(u(s),v(s))$$

はガウス曲率が 0 (可展面)となる．ここで w をある値 t とおけば

$$\tilde{\gamma}(s):=q(s,t)$$

は曲面 $\tilde{p}$ 上の曲線で，この曲線から法線 ν 方向に伸ばした線織面は q で表される曲面と重なり，これは可展面であるから，再び定理 5.2 より $\tilde{\gamma}(s)$ は $\tilde{p}$ の曲率線である．

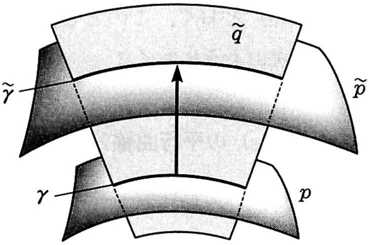


図 B-6.1

いま，線織面 $q(s,w)$ は可展面であるから 192 ページのように曲面 $q(s,w)$ から平面への長さを保つ対応が存在する．この対応で，曲線 $\gamma,\tilde{\gamma}$ が平面曲線 $\sigma,\tilde{\sigma}$ にそれぞれ対応しているとすると，直線 $w\mapsto q(s,w)$ が，この平面上の $\sigma(s)$ に直交する直線に対応し，σ と $\tilde{\sigma}$ は t だけ離れた平行曲線となる．ここで，曲面 p 上の曲線と見なしたときの $\gamma(s)$ の法曲率 κ_n は

$$\kappa_n=\gamma''\cdot\nu=-\gamma'\cdot\nu$$

となるが，これは可展面 q の曲線とみたときの γ の測地的曲率にほかならない．したがって可展面から平面への対応の作り方(192 ページ参照)から，これは $\sigma(s)$ の曲率に一致する．同様に $\tilde{\gamma}$ の法曲率は $\tilde{\sigma}$ の曲率に一致するから，平行曲線の曲率の関係 (6.1) を用いれば $\tilde{p}$ の主曲率 $\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2$ と p の主曲率 λ_1,λ_2 との間には (6.3) 式の関係が成り立っていることがわかる．このことより結論を得る． □

この定理の証明は，厳密な意味では少々不完全である．元の曲面の臍点では，その点を通る曲率線を考えることができないから，このような点においては定理の公式は示せたことにならないからである．しかし，たとえ点Pが臍点でも，臍点で

ない点列の極限になっていれば，H, K の連続性より公式が成り立つ．またPのまわりの半径 ε の球と曲面の共通部分がすべて臍点なら，その部分は平面か球面の一部になる(§9の命題9.5)．その場合には公式はもっと簡単に示せるから，一応これで，定理の厳密な証明が得られることになる．

定理6.1は，次のように直接的な計算によっても証明できる．

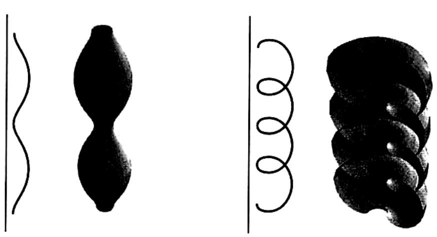
［**定理6.1の別証明**］ 曲面の臍点でない点のまわりで曲率線座標 (u, v) によって $p = p(u, v)$ と表されているとする．第一基本量を E, F, G，第二基本量を L, M, N とすると，B-5の定理5.1より $F = M = 0$ となる．このとき，単位法線ベクトル ν の微分は

$$\nu_u = -(L/E)p_u, \qquad \nu_v = -(N/G)p_v$$

となる(練習問題11の**1**の特別な場合である)．これを用いれば曲面 $p + t\nu$ の第一基本量，第二基本量を直接求めることができる． □

定理6.1から，もし曲面 p のガウス曲率 $K = 1/a^2 > 0$ が定数ならば，(6.3)で $t = a$ とおくことにより $\tilde{p}$ は平均曲率一定の曲面となる．また，平均曲率 $H \neq 0$ が定数ならば，$t = 1/(2H)$ とおくことで，ガウス曲率一定の曲面を得ることができる．

本文で求めた，ガウス曲率一定の回転面から，このようにして平均曲率一定の回転面をつくることができる(図B-6.2)．図B-6.2の左側の曲面を**アンデュロイド**，右側の曲面を**ノドイド**とよび，これらの回転面を**デロネイ曲面**[11] とよぶことがある．



図B-6.2　平均曲率一定の回転面

11) Delauney, Charles Eugène (1816 - 1872).

デロネイ曲面の作図 デロネイ曲面の母線は，次のようにして2次曲線を回転させることによって作図することもできる： 楕円を定直線上に滑らないように転がしたとき，楕円の1つの焦点の軌跡がアンデュロイドの母線となる．実際，この曲線を定直線のまわりに回転させて得られる回転面の平均曲率が一定であることを示そう．

まず準備として xy 平面の極座標 (r, θ) を用いて

(6.4) $$r = r(\theta) = \frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (a > 0,\ 0 < \varepsilon < 1)$$

で表される曲線は原点Oを1つの焦点とする楕円で，ε はその離心率[12)]となる．この楕円は $\gamma(\theta) := r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ と助変数表示されるから，そのP＝$\gamma(\theta)$ における接ベクトルは

$$\dot{\gamma}(\theta) = \left(\frac{-a\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}, \frac{a(\varepsilon+\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right) \qquad \left(\cdot = \frac{d}{d\theta}\right)$$

となるので，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ とPにおける楕円の接線とのなす角を ξ とすれば

$$\cos\xi = \frac{-\varepsilon\sin\theta}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}},$$

$$\sin\xi = \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}}$$

が成り立つことがわかる(図B-6.3左)．この楕円を図B-6.3右のように x 軸上に回転させよう．楕円が1つの焦点のまわりに角度 θ だけ回転したとき，x 軸との接点の移動距離 $s(\theta)$ は曲線 $\gamma(\theta)$ の弧長であるから

$$s(\theta) = \int_0^\theta \frac{a\sqrt{1+2\varepsilon\cos t+\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon\cos t)^2}\,dt$$

となる．このとき楕円の焦点の座標は

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x(\theta), y(\theta)) \\ &= (s(\theta) + r(\theta)\cos\xi(\theta),\ r(\theta)\sin\xi(\theta))\end{aligned}$$

となる．ここで，曲線 $(x(\theta), y(\theta))$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転面の平均曲率は

$$H = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}}{2(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})^3} + \frac{\dot{x}}{2y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{d\theta}\right)$$

12) 練習問題1の**3**参照．

であり[13]，$\varDelta = \sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2}$ とおくと，$\dot{x} = a(1 + \varepsilon\cos\theta)/\varDelta^3$，$\dot{y} = a\varepsilon\sin\theta/\varDelta^3$，$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a/\varDelta^2$ となるので，$H = (1 - \varepsilon^2)/(2a)$ と一定になる．

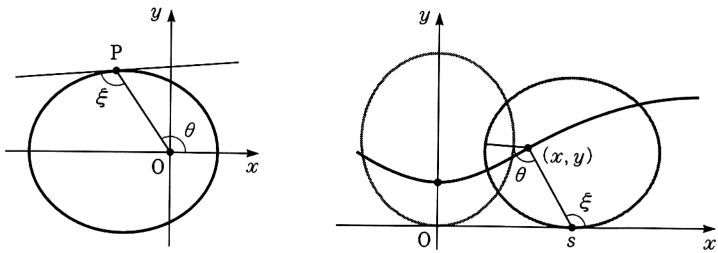


図 B-6.3　アンデュロイドの母線の作図

また，双曲線を定直線上に滑らないように回転させることを考える（図 B-6.4）．回転を続けると直線との接点は無限遠に行き，定直線は双曲線の漸近線に近づく．この極限の状態から，双曲線のもう一方の側を定直線に沿って回転させる．これを続けると，双曲線の 1 つの焦点の軌跡が描く曲線はノドイドの母線となる．実際，アンデュロイドの母線の作図で用いた楕円の極表示 (6.4) で $\varepsilon > 1$ とすると双曲線の表示となるから，同様の計算によって回転面の平均曲率が一定であることがわかる．なお (6.4) で $\varepsilon = 1$ とすると放物線の表示が得られるが，放物線を定直線上に回転させたときの焦点の軌跡は懸垂線（§1 参照）となり，得られる回転面は懸垂面（練習問題 8 の **6**），すなわち極小曲面になる．

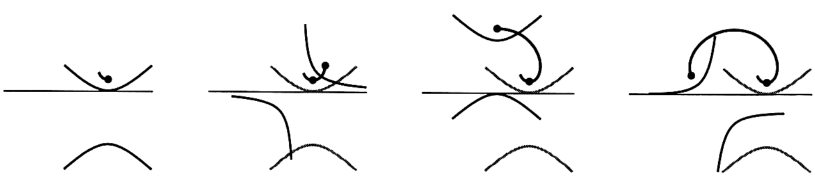


図 B-6.4　ノドイドの母線の作図

13)　直接計算でも示せるが，次のように考えることもできる：回転面の主曲率は，母線と回転方向の曲線の法曲率である．母線の法曲率は，平面曲線としての曲率であり，回転方向の曲線（すなわち円）の法曲率は，ムーニエの定理（練習問題 9 の **1**）から求められる．

問題の解答とヒント

ここでは，本文中の問題に対する解答の概略あるいはヒントを与える．これらは完全なものではないので，行間を埋めて完全な解答を作ることを試みてほしい．

§1

1. $2\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\{x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\}$ を用いよ．

2. パラメータ変換 $t=t(u)$ は単調増加であるから $dt/du\geqq 0$ であることに注意して，合成関数の微分公式を用いれば，

$$\int_c^d\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du=\int_c^d\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{du}\,du$$

となるので，置換積分法の公式から結論を得る．

3. （2） 関数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ にテイラーの定理（付録 A-1 の定理 1.1）を適用すると，

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2(1-\theta x)^{-3/2}\qquad(0<\theta<1)$$

となる θ が存在する．$x=\varepsilon^2\cos^2 t$ とおき，$0<\sqrt{1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t}<1$ に注意すれば，

$$\pi\left(2-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{3}{32}\varepsilon^4\right)<\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt<\pi\left(2-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$$

となる．ここに a と b の値を代入すると，周の長さ l は $40003.4<l<40003.6$ をみたすことがわかるので，周の長さはおよそ 40003 ± 0.1 km となる．

4. $|\dot{\gamma}(t)|=2a\sin(t/2)$ に注意すればよい．

§2

2. ハンドルの角度を固定すれば前輪，後輪の軌跡は同心円を描く．したがって円の中心は前輪と後輪の車軸を延長した直線上の交点にあり，これらの直線がなす角は θ であることがわかる．たとえば内側の後輪の回転半径は $\Delta/\tan\theta-\varepsilon/2$ となり，曲率はその逆数となる．また，内側の前輪の回転半径は $\Delta/\sin\theta-\varepsilon/2$ となる．この 2 つの回転半

径の違いは「内輪差」とよばれている.

3. x 軸に関して折り返すとして一般性を失わない. 2 曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ と $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), -y(s))$ の曲率を比較せよ.

4. (1) $s(t) = 4a\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right)$, $t(s) = 2\arccos\left(1 - \dfrac{s}{4a}\right) \quad (0 \leqq s \leqq 8a)$.

(2) $\gamma(s) = \left(2a\arccos\left(1 - \dfrac{s}{4a}\right) + \dfrac{(s-4a)\sqrt{s(8a-s)}}{8a}, \dfrac{s(8a-s)}{8a}\right)$, なので $\kappa(s) = -1/\sqrt{s(8a-s)}$. これに (1) の $s(t)$ を代入すれば $\kappa(t) = -1/(4a\sin(t/2))$ となる.

5. $\gamma_1(s)$ を与えられた曲線とし,

$$\gamma_2(s) = A\gamma_1(s) + \boldsymbol{q} \qquad \left(A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{q} \text{ は定ベクトル}\right)$$

とすると, $\det(\gamma_2', \gamma_2'') = \det(\gamma_1', \gamma_1'')$.

6. $\theta(s) = \displaystyle\int_0^s \kappa(u)\,du$ とおくと

$$\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)),$$
$$\gamma''(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \kappa(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$$

であるから $|\gamma'(s)| = 1$ であり, 曲率が $\kappa(s)$ である.

7. s は弧長なので $\gamma'(0) = \boldsymbol{e}(0)$, $\gamma''(0) = \kappa(0)\,\boldsymbol{n}(0)$ である. さらに曲率の定義式を微分してフルネの公式を用いれば $\gamma'''(0) = -\kappa(0)^2\boldsymbol{e}(0) + \kappa'(0)\,\boldsymbol{n}(0)$ であるから, テイラーの定理(付録 A-1 の定理 1.1)より結論を得る.

8. (1) 命題 2.5 の記号のもとで $\dfrac{d^3f}{dx^3}(0) = \dfrac{\dddot{y}\dot{x}^2 - \dddot{x}\dot{x}\dot{y} - 3\dot{x}\ddot{x}\ddot{y} + 3\ddot{x}^2\dot{y}}{\dot{x}^5}$ となり, x と y の 3 階までの微分係数で表される.

(2) 命題 2.6 の証明と同様.

(3) $\gamma(s_0)$ において定義 2.3 のような xy 座標軸をとり, 曲線を $y = f(x)$ のグラフで表すと $f(0) = \dot{f}(0) = 0$ ($\dot{} = d/dx$). さらに $\kappa(0) = \ddot{f}(0)$, $\dot{\kappa}(0) = \dddot{f}(0)$ となり

$$f(x) = \frac{1}{2}\kappa(0)\,x^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}(0)\,x^3 + o(x^3)$$

となる. 一方, $y = f(x)$ のグラフの原点における曲率円を $y = g(x)$ のグラフで表せば

$$g(x) = \frac{1}{2}\kappa(0)\,x^2 + o(x^3)$$

となるので, これらが 3 次の接触をするための必要十分条件は $\dot{\kappa}(0) = 0$ となることがわかり, $\dot{\kappa} = d\kappa/dx = \kappa'/x'$ なので結論を得る.

§3

1. 一般のパラメータ t で表された曲線の全曲率は $\int \kappa(s)\, ds = \int \kappa(t) \frac{ds}{dt}\, dt$ である．

2. （1） テイラーの定理より

$$f(t)-f(s)=f'(s)(t-s)+\frac{1}{2}f''(s+\theta(t-s))(t-s)^2$$

をみたす θ（$0<\theta<1$）が存在する．

（2） $(\gamma(t)-\gamma(u))/(t-u)$ の $u=s$ と $u=s+\delta$ の場合に前問の結果を適用せよ．さらに $s<t<s+l$ において次の式に注意する：

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\frac{|t-s|}{|\gamma(t)-\gamma(s)|}=-\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-(s+l)}\frac{|t-(s+l)|}{|\gamma(t)-\gamma(s)|}=\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{|\gamma(t)-\gamma(s)|}$$

3. （1） $\boldsymbol{e}=(\xi,\eta)$ とおき，$\boldsymbol{n}=(-\eta,\xi)$ とすると，$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=1$ であるから $\boldsymbol{e}'=f\boldsymbol{n}$ をみたす関数 f が存在する．ここで

$$A_1:=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad A_2:=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})=\begin{pmatrix}\xi & -\eta\\ \eta & \xi\end{pmatrix}$$

によって 2 つの直交行列を定めると，$\theta'=f$ であることに注意すれば

$$\frac{d}{ds}(A_2\,{}^tA_1)=A_2\begin{pmatrix}0 & -f\\ f & 0\end{pmatrix}{}^tA_1+A_2\begin{pmatrix}0 & f\\ -f & 0\end{pmatrix}{}^tA_1=O$$

となるので $A_2\,{}^tA_1$ は定数行列になるが，初期条件からこれは単位行列にならなければならず $A_2=A_1$ がいえる．この等式の第 1 列が結論の式である．

（2） $\boldsymbol{e}(t)=w(0,t)$，$\alpha=0$ として (1) の結果を適用する．

（3） t を 1 つ固定して，$\boldsymbol{e}(s)=w(s,t)$，$\alpha=\theta(t)$ とし，(2) の結果を用いる．

§4

1. 一般に極座標で表された曲線 $r=r(\theta)$ の，$\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ に対応する扇形の面積は $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\, d\theta$ で与えられる．

2. k 倍（$k>0$）に拡大すると $r=ka^\theta$ と表示される．$b=\log_a k$ とおけば $ka^\theta=a^b a^\theta=a^{\theta+b}$ となり，元のうずまき線のパラメータを θ から $\theta+b$ に取り換えたものである．

4. $r=a\theta$ は $\gamma(\theta)=(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta)$ と表すことができるので，§2 の (2.7) より，曲率は $(\theta^2+2)/(a(\theta^2+1)^{3/2})$．同様に $r=a^\theta$ の曲率は $a^{-\theta}/\sqrt{1+(\log a)^2}$．

5. メビウス変換 $w=(az+b)/(cz+d)$ （ $ad-bc\neq 0$ ）を考える．$c=0$ のときは，$w=pz+q$ （$p\neq 0$）と書けるから，$p=r\,e^{i\theta}$ （ $r>0$ ）とおいて

$$w=r\,e^{i\theta}\left(z+\left(-\frac{q}{p}\right)\right)$$

となるので，この変換は，平行移動，回転，拡大・縮小の合成で書けたことになる．

また，$c\neq 0$ のときは，分母，分子を適当に定数倍して $ad-bc=1$ として一般性を失わない．このとき，次の形に変形できる：

$$w=\frac{a}{c}+\frac{-1/c}{cz+d}.$$

6. 対数うずまき線を $\gamma(\theta)=(a^\theta\cos\theta, a^\theta\sin\theta)$ と助変数表示すれば，その縮閉線は $(\log a)\,a^\theta(-\sin\theta,\cos\theta)$ となる．これは元のうずまき線を左に 90° 回転させてから拡大したもので，問題 **2** より元のうずまき線と合同になる．

§ 5

1. $\gamma(s)$ を，弧長パラメータで表示された空間曲線，$\tilde{\gamma}(s)=T\gamma(s)+\boldsymbol{a}$ とする．ただし，T は行列式の値が 1 であるような直交行列で，$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^3$ は定ベクトルである．$\gamma(s)$ の単位接ベクトル，主法線ベクトル，従法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ とすると $\tilde{\gamma}(s)$ の単位接ベクトル $\tilde{\boldsymbol{e}}$，主法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{n}}$，従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}$ はそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{e}}=T\boldsymbol{e}$，$\tilde{\boldsymbol{n}}=T\boldsymbol{n}$，$\tilde{\boldsymbol{b}}=T\boldsymbol{b}$ と書ける．最後の関係式は付録 A-3 の系 3.2 を用いた．

2. まず $\gamma'\times\gamma''=(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})/|\dot{\gamma}|^3$ が以下の式の最初の 2 つから得られる：

$$\gamma'=\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|},\qquad \gamma''=\left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)'\dot{\gamma}+\frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2},\qquad \gamma'''=(\ \dot{\gamma},\ddot{\gamma}\ \text{の一次結合}\ )+\frac{\dddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3}.$$

これより次を得る：

$$\kappa=|\kappa\boldsymbol{b}|=|\gamma'\times(\kappa\boldsymbol{n})|=|\gamma'\times\gamma''|=\frac{|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}.$$

一方，$\boldsymbol{b}$ は $\gamma'\times\gamma''$ に比例するので $\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}$ にも比例し $\boldsymbol{b}=(\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma})/|\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}|$ を得る．さて，フルネの公式から $\tau\kappa^2=\det(\gamma',\gamma'',\gamma''')$ となるが，この式と κ^2 の公式と $\gamma',\gamma'',\gamma'''$ を上の関係により $\dot{\gamma},\ddot{\gamma},\dddot{\gamma}$ で置き換えれば τ の公式が得られる．

4. 平面曲線の場合と同様に (5.6) とテイラーの定理から結論を得る．

5. 問題 **3** と曲線論の基本定理 5.2 の一意性から結論が得られる．

6. γ が原点を中心とする球面上にあるとすると，$\gamma\cdot\gamma$ は一定なので $\gamma'\cdot\gamma=0$，さらに 2 回微分すると $\gamma'''\cdot\gamma=0$ となる．一方，$\gamma'''\cdot\gamma''=0$ なので，γ''' は $\gamma\times\gamma''$ に比例する．ところが $\gamma\times\gamma''$ は γ' に比例するので捩率が 0 となる．

7. γ_2 は直線 d に関して γ_1 を折り返して得られるものとすれば，空間で直線 d を軸とする 180° の回転を考えれば γ_1 を γ_2 に重ね合わせることができる．

§6

1. $p(u,v)=(\cos u\ (a+b\cos v),\ \sin u\ (a+b\cos v),\ b\sin v)$,
ただし，$-\pi \leqq u, v \leqq \pi$.

2. たとえば，

$$p(u,v)=(2\cos u, 2\sin u, 0)+v\{\cos(u/2)\ (0,0,1)-\sin(u/2)\ (\cos u, \sin u, 0)\},$$

ただし，$-\pi \leqq u \leqq \pi$，$-1 \leqq v \leqq 1$.

3. $f(x,y)$ のグラフが $p(u,v)=(u,v,f(u,v))$ と助変数表示されることを用いよ．

4. 合成関数の微分公式より

$$p_\xi \times p_\eta=(u_\xi p_u+v_\xi p_v)\times(u_\eta p_u+v_\eta p_v)=(u_\xi v_\eta - v_\xi u_\eta)(p_u \times p_v).$$

5. 前の問題 **4** より $|p_\xi \times p_\eta|=|J|\,|p_u \times p_v|$, $J=\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ が成り立つ．これと重積分の変数変換の公式を用いよ．

6. $\tilde{p}=Tp+\boldsymbol{b}$ とおけば，$\tilde{p}_u=Tp_u$，$\tilde{p}_v=Tp_v$ だから，

$$|\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v|=|(Tp_u)\times(Tp_v)|=|\det T(p_u \times p_v)|=|p_u \times p_v|.$$

§7

1. 2 次方程式 $\lambda^2-(b_{11}+b_{22})\lambda+(b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2)=0$ が重解を含めて 2 つの正の実数解をもつためには $b_{11}+b_{22}>0$，$b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2>0$ となることが必要十分である．この第 2 式から b_{11} と b_{22} は同符号である．

2. (7.3) のみ示す．

$$d(\varphi(f))=\frac{\partial}{\partial u}(\varphi(f(u,v)))\,du+\frac{\partial}{\partial v}(\varphi(f(u,v)))\,dv$$
$$=\dot{\varphi}(f(u,v))\,f_u du+\dot{\varphi}(f(u,v))\,f_v dv=\dot{\varphi}(f)\,df\,.$$

3. 曲面 $p(u,v)$ に座標変換 $u=u(\xi,\eta)$，$v=(\xi,\eta)$ をほどこしてできる助変数表示 $p(\xi,\eta)$ の第一基本量を $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ とする．このとき，合成関数の微分公式から

$$\tilde{E}=p_\xi\cdot p_\xi=(p_u u_\xi+p_v v_\xi)\cdot(p_u u_\xi+p_v v_\xi)$$
$$=u_\xi{}^2(p_u\cdot p_u)+2u_\xi v_\xi(p_u\cdot p_v)+v_\xi{}^2(p_v\cdot p_v)=u_\xi{}^2E+2u_\xi v_\xi F+v_\xi{}^2G$$

を得る．他の成分も同様．

4. $E=1+f_x{}^2$，$F=f_xf_y$，$G=1+f_y{}^2$．

5. 54 ページ，57 ページの表示を用いる．

（1） 楕円放物面： $E=1+4x^2/a^4$，$F=4xy/(a^2b^2)$，$G=1+4y^2/b^4$．

（2） 双曲放物面： $E=1+4x^2/a^4$，$F=-4xy/(a^2b^2)$，$G=1+4y^2/b^4$．

（3） 楕円面： $E=a^2\sin^2u\cos^2v+b^2\sin^2u\sin^2v+c^2\cos^2u$，

$F=(a^2-b^2)\cos u\cos v\sin u\sin v$，$G=a^2\cos^2u\sin^2v+b^2\cos^2u\cos^2v$．

（4） 一葉双曲面： $E=a^2\sinh^2u\cos^2v+b^2\sinh^2u\sin^2v+c^2\cosh^2u$，

$F=(b^2-a^2)\cosh u\cos v\sinh u\sin v$，$G=a^2\cosh^2u\sin^2v+b^2\cosh^2u\cos^2v$．

（5） 二葉双曲面： $E=a^2\cosh^2u\cos^2v+b^2\cosh^2u\sin^2v+c^2\sinh^2u$，

$F=(b^2-a^2)\cosh u\cos v\sinh u\sin v$，$G=a^2\sinh^2u\sin^2v+b^2\sinh^2u\cos^2v$．

6. $E=\dot{x}^2+\dot{z}^2$，$F=0$，$G=x^2$．

§8

1. 行列 B は対称行列だから，直交行列 P を用いて対角化することができる：

$$P^{-1}BP={}^tPBP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\qquad(\lambda,\mu>0).$$

ここで $R=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix}{}^tP$ とおくと，R は正則な対称行列で $R^2=B$ となる．いま，$R(B^{-1}A)R^{-1}=R^{-1}AR^{-1}$ であるが，R^{-1} も A も対称行列なので右辺は対称行列．したがってその固有値は実数であるが，それらは $B^{-1}A$ の固有値と一致する．

2. 右に凸の部分では正，左に凸の部分では負．

3. $K=(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2)/(1+f_x{}^2+f_y{}^2)^2$，

$$H=\frac{1}{2}\{f_{xx}(1+f_y{}^2)-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}(1+f_x{}^2)\}/(1+f_x{}^2+f_y{}^2)^{3/2}.$$

4. 54 ページ，57 ページの表示を用いる．

（1） 楕円放物面：

$$K=\frac{4}{a^4b^4(1+4x^2/a^4+4y^2/b^4)^2},\qquad H=\frac{a^2b^2(a^2+b^2)+4b^2x^2+4a^2y^2}{a^4b^4(1+4x^2/a^4+4y^2/b^4)^{3/2}}.$$

（2） 双曲放物面：

$$K=-\frac{4}{a^4b^4(1+4x^2/a^4+4y^2/b^4)^2},\qquad H=\frac{a^2b^2(b^2-a^2)-4b^2x^2+4a^2y^2}{a^4b^4(1+4x^2/a^4+4y^2/b^4)^{3/2}}.$$

（3） 楕円面： $\varDelta=\sqrt{b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v+c^2a^2\cos^2 u\sin^2 v+a^2b^2\sin^2 u}$ とおいて $K=a^2b^2c^2/\varDelta^4$,

$$H=\frac{abc}{2\varDelta^3}\{a^2(\sin^2 v+\sin^2 u\cos^2 v)+b^2(\cos^2 v+\sin^2 u\sin^2 v)+c^2\cos^2 u)\}.$$

とくに $a=b=c$（球面）の場合は $K=1/a^2$, $H=1/a$ となる.

（4） 一葉双曲面： $\varDelta=\sqrt{b^2c^2\cosh^2 u\cos^2 v+c^2a^2\cosh^2 u\sin^2 v+a^2b^2\sinh^2 u}$ とおいて $K=-a^2b^2c^2/\varDelta^4$,

$$H=\frac{abc}{2\varDelta^3}\{a^2(\sinh^2 u\cos^2 v-\sin^2 v)+b^2(\sinh^2 u\sin^2 v-\cos^2 v)+c^2\cosh^2 u\}.$$

（5） 二葉双曲面： $\varDelta=\sqrt{b^2c^2\sinh^2 u\cos^2 v+c^2a^2\sinh^2 u\sin^2 v+a^2b^2\cosh^2 u}$ とおいて $K=-a^2b^2c^2/\varDelta^4$,

$$H=\frac{abc}{2\varDelta^3}\{a^2(\cosh^2 u\cos^2 v-\sin^2 v)+b^2(\cosh^2 u\sin^2 v-\cos^2 v)+c^2\sinh^2 u\}.$$

5. $\tilde{p}(u,v)=cp(u,v)$ とすると $\tilde{p}_u=cp_u$, $\tilde{p}_v=cp_v$ なので $\tilde{p}$ の第一基本量は p の第一基本量の c^2 倍になる. また p と $\tilde{p}$ の (u,v) における単位法線ベクトルは一致し $\tilde{p}_{uu}=cp_{uu}$, … が成り立つから, $\tilde{p}$ の第二基本量は p の第二基本量の c 倍になる.

6. $(xx')'=1$ であるから $xx'=u+\alpha$（α は定数）となるが, 必要ならパラメータを取り換えることによって $\alpha=0$ としてよい. ここで $2xx'=(x^2)'$ だから $x^2=u^2+c$（c は定数）と書けるので $x=\pm\sqrt{u^2+c}$ となる. とくに u^2+c は正でなければならない. したがって $(z')^2=1-(x')^2=c/(u^2+c)$ となるが, この式が正の値をとらなければならないので $c>0$. したがって $c=a^2$（a は実数の定数）とおけば

$$z(u)=\int\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du=a\log(u+\sqrt{u^2+a^2})+b \qquad (b\text{ は定数})$$

である. 適当に平行移動して $b=0$ とすることができるから, 求める曲線の方程式は $z=a\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$ となる. これを x について解けばよい.

7. 問題**1**より, 行列 $A=\hat{I}^{-1}\hat{I\!I}$ に対して, ある対称行列 R が存在して, $R^{-1}AR$ は対称行列とできる. いまガウス曲率と平均曲率がともに0ならば A の固有値はともに0となるから, $R^{-1}AR$ の固有値はともに0. とくに $R^{-1}AR$ は対角化可能であるから $R^{-1}AR=O$（零行列）となり, よって $\hat{I\!I}=O$ で第二基本量はすべて0である. このとき, 曲面の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ は定ベクトルになり, 曲面は平面となる.

8. 対応 F が全単射であることは定義から明らか. $\mathrm{P}\in D$ をとり, ψ を定理8.3の証明で示した $\varphi:(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$ の逆写像とすると $F(\xi,\eta)=\psi(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ と表示される. この表示は P の近傍でしか有効でないが, P は任意に固定できるので, この表示から F が D 上のすべての点の近傍で C^∞ 級であることがわかる.

(u, v) と (ξ, η) の役割を入れ替えれば F^{-1} も C^∞ 級であることがわかり，F が微分同相写像であることがわかる．

§9

2. 回転面を§7の問題**6**のように表示すると，行列 $A = \hat{I}^{-1}\hat{II}$ は対角行列となるから u 方向と v 方向が主方向になる．これらはそれぞれ母線方向と回転方向である．

3. （1） 行列 $A = \hat{I}^{-1}\hat{II}$ の固有値は主曲率 λ（重根）であるが，§8の問題**7**と同様に $A = \lambda I$（I は単位行列）であることがわかる．

（2） $\nu_u = ap_u + bp_v + c\nu$ とおき，両辺に p_u, p_v, ν を内積し，上の結果を用いる．

（3） (1) を用いれば $\nu_{uv} = \nu_{vu}$ より $\lambda_u p_u - \lambda_v p_v = 0$ が成り立つ．p_u と p_v は一次独立だから $\lambda_u = \lambda_v = 0$ である．

（4） $p - (1/\lambda)\nu$ を u, v で微分すると 0 となることを示せばよい．

4. 2つの漸近方向が x 軸の正の部分となす角を φ_1, φ_2（$-\pi/2 \leqq \varphi_j \leqq \pi/2$，$\varphi_1 < \varphi_2$）とすれば，定理9.7より $\tan\varphi_1 = -\sqrt{|\lambda_1/\lambda_2|}$，$\tan\varphi_2 = \sqrt{|\lambda_1/\lambda_2|}$ が成り立つ．したがって $|\varphi_1| = |\varphi_2|$ となり，x 軸は2つの漸近方向を2等分する．漸近方向のなす角を μ とすれば $\varphi_2 = \mu/2$ だから結論が得られる．

5. 極小曲面ならば主曲率は $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ をみたしているから問題**4**より明らか．

§10

1. 弧長パラメータで表された直線 $\gamma(s)$ は $\gamma''(s) = 0$ をみたす．

2. 円柱を $p(u, v) = (R\cos v, R\sin v, u)$（$R$ は正の定数）と表示するとその単位法線ベクトルは $\nu = (-\cos v, -\sin v, 0)$ となる．円柱上の弧長をパラメータとする曲線 $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ に対して

$$\gamma'(s) = u'(s)\,p_u + v'(s)\,p_v, \qquad \gamma''(s) = u''(s)\,p_u + v''(s)\,p_v + (u'(s))^2\nu.$$

とくに s が弧長であるから $R^2(u')^2 + (v')^2 = 1$ が成り立つ．したがって γ が測地線であるための必要十分条件は $u'' = v'' = 0$ となることである．これより $u = as + b$，$v = cs + d$ となる．とくに $a = 0$ のときは母線，$a \neq 0$ のときはつるまき線である．

3. 原点を中心とする球面上の，弧長をパラメータとする曲線 $\gamma(s)$ が測地線であるためには γ'' が法線方向を向いていなければならない．ここで $\gamma(s)$ における球面の法線ベ

クトルは γ と平行であるから，測地線ならば $\gamma'' \times \gamma = 0$ となる．ここで，$(\gamma \times \gamma')' = \gamma \times \gamma''$ を用いれば，測地線 γ に対して $\boldsymbol{v} := \gamma \times \gamma'$ が s に無関係に一定となる．このとき $\boldsymbol{v}$ は γ に直交するから，$\gamma(s)$ は原点（中心）を通り $\boldsymbol{v}$ に垂直な平面に含まれる．

4. 弧長をパラメータとする xz 平面上の曲線 $(x(s), z(s))$ に対して $p(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$ とおくとき，母線は $p(s, a)$（a は定数）に対応する曲線である．この加速度ベクトルが曲面の法線方向を向いていることを示せばよい．

5. 回転と平行移動をほどこして曲面は xy 平面について対称としてよい．すると xy 平面と曲面の共通部分において上向きのベクトル $(0, 0, 1)$ は曲面に接する．いま xy 平面による曲面の切り口を弧長パラメータ s を用いて $\gamma(s)$ と表示すると $\gamma(s)$ において曲面に接するベクトルは $\gamma'(s)$ と $(0, 0, 1)$ の一次結合で表される．さらに $\gamma''(s)$ も xy 平面上のベクトルで $\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) = 0$ をみたすから，曲面の法線ベクトルの方向を向いていることがわかる．

§ 11

1. p_u, p_v, ν は曲面上の各点において $\boldsymbol{R}^3$ の基底を与えているから ν_u, ν_v はこれらの一次結合で表される．$\nu_u = ap_u + bp_v + c\nu$ とおいてこの両辺に ν を内積すると，$\nu_u \cdot \nu = (1/2)(\nu \cdot \nu)_u$ から $c = 0$ となる．また，両辺に p_u を内積すれば $-L = aE + bF$ となり，p_v を内積すれば $-M = aF + bG$ となる．ここで $EG - F^2 \neq 0$ に注意すれば結論の第1式を得る．

§ 12

1. 局所座標系を用いて $\alpha = f_1 du + f_2 dv$ とすると $d\alpha = df_1 \wedge du + df_2 \wedge dv$ となる（(12.2)を用いよ）．したがって，$X = g_1 \dfrac{\partial}{\partial u} + g_2 \dfrac{\partial}{\partial v}$，$Y = h_1 \dfrac{\partial}{\partial u} + h_2 \dfrac{\partial}{\partial v}$ とおき，(12.1) を用いて $d\alpha(X, Y)$ を計算して，次の式を用いればよい：

$$[X, Y] = \left(g_1 \frac{\partial h_1}{\partial u} - h_1 \frac{\partial g_1}{\partial u} + g_2 \frac{\partial h_1}{\partial v} - h_2 \frac{\partial g_1}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(g_1 \frac{\partial h_2}{\partial u} - h_1 \frac{\partial g_2}{\partial u} + g_2 \frac{\partial h_2}{\partial v} - h_2 \frac{\partial g_2}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

4. （1） P_0 と P を結ぶ2つの曲線 $\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)$（$0 \leqq t \leqq 1$）をとり，γ_1 に γ_2 の逆向きの曲線をつないだ閉曲線 γ を考える．もし γ_1 と γ_2 が交叉しなければ γ は単純閉曲線

となり，D が単連結であることより円板と同相な領域 Ω を囲む．したがって，ストークスの定理より

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = \int_{\gamma} \alpha = \int_D d\alpha = 0$$

となる．すなわち，積分は終点Pのみにより，経路にはよらない．γ_1 と γ_2 が交叉するときは，問題の図のようにいくつかの小さな領域に分けて考えればよい．

（2） $\alpha = \alpha_1 du + \alpha_2 dv$ と局所座標を用いて表示しておく．P_0 の座標を (u_0, v_0)，Pの座標を (u, v) とすると

$$f(u + \varDelta u, v) - f(u, v) = \int_u^{u+\varDelta u} \alpha_1\, du$$

であるから $f_u = \alpha_1$ である．同様に $f_v = \alpha_2$ だから $df = \alpha$ となる．

§ 13

2. $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1$，$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$ を微分して $d\hat{e}_1(X) \cdot \hat{e}_1 = d\hat{e}_2(X) \cdot \hat{e}_2 = 0$，$d\hat{e}_2(X) \cdot \hat{e}_1 = -d\hat{e}_1(X) \cdot \hat{e}_2$ を得る．ここで $\{e_1, e_2\}$ の双対基底の場 $\{\omega_1, \omega_2\}$ をとると $dp(X) = \omega_1(X)\, \hat{e}_1 + \omega_2(X)\, \hat{e}_2$，すなわち $dp = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2$ となるので，さらに外微分をとると

$$0 = ddp = d\omega_1 \hat{e}_1 + d\omega_2 \hat{e}_2 + \omega_1 \wedge d\hat{e}_1 + \omega_2 \wedge d\hat{e}_2.$$

この両辺に $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ を内積し，問題に与えたように μ をとると $d\omega_1 = \omega_2 \wedge \mu$，$d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \mu$ となる．

3. 問題で与えられたように $\nabla_{\partial/\partial u} \dfrac{\partial}{\partial u}$ などを定義し，一般のベクトル場に対しては共変微分の性質 (13.6) - (13.9) をみたすように $\nabla : \mathfrak{X}^\infty(S) \times \mathfrak{X}^\infty(S) \to \mathfrak{X}^\infty(S)$ を定義する．これが (13.10), (13.11) をみたす共変微分であることを示せば，定理 13.3 より ∇ がレビ・チビタ共変微分であることがわかる．(13.10), (13.11) を示すためにはクリストッフェル記号の性質 $\Gamma_i{}^k{}_j = \Gamma_j{}^k{}_i$ と 108 ページに述べた $\Gamma_1{}^1{}_1 E + \Gamma_1{}^2{}_1 F = \dfrac{1}{2} E_u$ などを用いればよい．

4. $e_1 = \partial/\partial r$，$e_2 = h^{-1}\partial/\partial\theta$ は正規直交基底の場で，その双対基底の場は $\omega_1 = dr$，$\omega_2 = h\, d\theta$ である．

§14

3. （1） 問題**2**の結果を用いればよい．

（2） 曲線を $\gamma(t)=(u_0, t)$ （$a \leqq t \leqq b$）とおく．この助変数 t は計量 $ds_H{}^2$ に関して弧長となっていないので，弧長パラメータ $s=\int_a^t \frac{1}{\tau}\,d\tau=\log\frac{t}{a}$ にとりなおして $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ を計算する．

（6） z, w を虚軸上に写すメビウス変換を考えよ．

4. （1） サイクロイドの場合，練習問題1の**4**のようなパラメータが弧長に比例する．

§15

1. 等温座標系を用いよ．

2. $\boldsymbol{H}:=H\nu$ とおくと，これは曲面全体で定義された零でない法ベクトル場である．いま，S の局所座標系 (u, v) をとる．$p_u \times p_v$ は $\boldsymbol{H}$ と同じ向きか逆向きを向くが，もし逆向きなら (u, v) を (v, u) とおくことで，つねに曲面上で $p_u \times p_v$ が $\boldsymbol{H}$ と同じ向きを向くような座標系で曲面を覆うことができる．座標変換のヤコビ行列式は正であるから，これらの座標系は向きが同調している．すなわち S は向きづけ可能である．

付録 B-1

1. $\boldsymbol{n}(s)$ を $\sigma(s)$ の左向き単位法線ベクトルとして $\gamma'(s)=(\delta-s)\,\kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s)$，$\gamma''(s)=\{(\delta-s)\,\kappa(s)\}'\boldsymbol{n}(s)-(\delta-s)\,\kappa(s)^2\gamma'(s)$ となるから $\gamma(s)$ の曲率は

$$\frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'(s)|^3}=\frac{\kappa^3(\delta-s)^2}{|\kappa(\delta-s)|^3}=\frac{\operatorname{sign}\kappa}{\delta-s} \qquad \left(\operatorname{sign}\kappa=\frac{\kappa}{|\kappa|}\right)$$

となる．

2. サイクロイド $\gamma(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ の縮閉線は

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=(a(t+\sin t), a(\cos t-1))\\&=(a(\pi+t-\sin(\pi+t)), a(1-\cos(\pi+t)))+(-\pi a, 2a).\end{aligned}$$

3. （1） $t=0$ で $\gamma(b)$ を出発した物体の時刻 t における位置を $\gamma(w(t))=(u(w(t)), v(w(t)))$，速さを $V(t)$ とすると，力学的エネルギーの保存則から $mV^2/2+mgv=$ 一定 となる．とくに $t=0$ のときは $V=0$，$v=0$ であるから，この定数は0となり，$V=\sqrt{2g|v|}$ となる．一方，

$$V=\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2}\,\frac{dw}{dt}$$

だから

$$\frac{dt}{dw}=\frac{1}{\sqrt{2g|v|}}\sqrt{\left(\frac{du}{dw}\right)^2+\left(\frac{dv}{dw}\right)^2}$$

となる．この両辺を $w=b$ から $w=c$ まで積分すればよい．

（2） 問題の図のようなサイクロイドを $\gamma(s)=(u(s),v(s))$ と弧長パラメータで表示すると，練習問題2の**4**より $v(s)=\{b(8a-b)-s(8a-s)\}/8a$ となる．とくに物体は $s=b$ から $s=4a$ まで移動するから (1) の積分を行えばよい．この値の4倍がサイクロイド振り子の周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ となる．

付録 B-3

1. 関係式 $\eta=\log(\tan(u/2+\pi/4))$ から $\cos^2 u=1/\cosh^2\eta$ を導けばよい．

2. 練習問題6の**1**の解答のような助変数表示 $p(u,v)$ をとると，$E=b^2$，$F=0$，$G=(b\cos u+a)^2$ となる．そこで $\xi=b\sin u+au$，$\eta=v$ とすれば逆関数定理より $(u,v)\mapsto(\xi,\eta)$ は局所的に逆写像をもつので，これは座標変換となる．このとき (ξ,η) に関する第一基本形式は

$$ds^2=\frac{1}{(b\cos u+a)^2}d\xi^2+(b\cos u+a)^2 d\eta^2$$

となり，これが正積地図を与えていることがわかる．(正積地図の作り方は一通りではないので，ここにあげた以外にも解答はありうる.)

3. xy 平面の極座標 (r,θ) をとり $\xi=\sqrt{2}r\cos(\theta/\sqrt{2})$，$\eta=\sqrt{2}r\sin(\theta/\sqrt{2})$ とおくと，座標系 (ξ,η) が求めるものである．

4. 南極における球面の接平面を Π とする．大円は，球面とその中心を通る平面 Γ の共通部分であるから，大円の平面 Π への中心射影の像は Γ と Π の共通部分，すなわち直線である．

参考書・参考文献

曲線・曲面に関するもの

[1] 安達忠次，微分幾何学概説，培風館，1976.

[2] 剱持勝衛，曲面論講義 — 平均曲率一定曲面入門，培風館，2000.

[3] クリンゲンバーグ(小畠 訳)，微分幾何学，海外出版貿易，1975.（W. Klingenberg, Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer-Verlag, 1973）

[4] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何(改訂版)，裳華房，1995.

[5] 西川青季，幾何学，朝倉書店，2002.

[6] 佐々木重夫，微分幾何学，基礎数学選書，岩波書店.

多様体に関するもの

[7] 松本幸夫，多様体の基礎，東京大学出版会.

[8] 松島与三，多様体入門，1970，裳華房.

[9] ミルナー(志賀 訳)，モース理論，1968，吉岡書店.（J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963）

[10] 酒井 隆，リーマン幾何学，1992，裳華房.

[11] シンガー・ソープ(赤 他訳)，トポロジーと幾何学入門，培風館，1976.（I. M. Singer and J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer-Verlag）

[12] 丹野修吉，多様体の微分幾何学，1976，実教出版.

[13] F. W. Warner, Foundations of differential manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, 1983.

その他

[14] 足立正久，微分位相幾何学，共立出版，1976.

[15] 中村幸四郎，寺阪英孝，伊東俊太郎，池田美恵(訳・解説)，ユークリッド原

論，共立出版，1971.

[16] ギンディキン(三浦 訳)，ガリレイの 17 世紀，1996，シュプリンガー・フェアラーク東京.

[17] 加藤十吉，位相幾何学，1988，裳華房.

[18] 小林 治，山辺の問題について，Seminar on Mathematical Sciences No. 16, 1990，慶應義塾大学.

[19] 水野克彦，解析学，学術図書.

[20] 森田茂之，微分形式の幾何学 1•2，岩波講座現代数学の基礎，1996，岩波書店.

[21] 佐武一郎，線型代数学，1974，裳華房.

[22] 白岩謙一，力学系の理論，1974，岩波書店.

[23] 杉浦光夫，解析入門 I/II，東京大学出版会.

[24] 高野恭一，常微分方程式，1994，朝倉書店.

[25] 戸田盛和，一般力学 30 講，1994，朝倉書店.

[26] 内田伏一，位相入門，1997，裳華房.

[27] 梅原雅顕，4 頂点定理について，数学，50 巻 4 号(1998)，pp. 420-427.

[28] 梅原雅顕，「うずまきの幾何」，川久保・宮西編，現代数学序説(I)，大阪大学出版会，1996.

索　引

あ　行

か　行

さ　行

た 行

な　行

は　行

ま 行

や 行

ら 行

わ 行

著者略歴

うめ はら まさ あき
梅 原 雅 顕　1984年　慶應義塾大学工学部数理工学科卒,
筑波大学大学院にて理学修士取得後,
筑波大学助手, 大阪大学助教授を経て,
現在　広島大学教授, 博士(理学).

やま だ こう た ろう
山田光太郎　1984年　慶應義塾大学工学部数理工学科卒,
同大学院工学研究科修士課程修了.
慶應義塾高等学校教諭, 熊本大学講師・助教授を経て,
現在　九州大学教授, 博士(理学).

曲 線 と 曲 面 — 微分幾何的アプローチ —

2002年 6月15日　第1版発行

検印
省略

定価はカバーに表示してあります.

著作者　梅 原 雅 顕
　　　　山 田 光 太 郎
発行者　吉 野 達 治
発行所　東京都千代田区四番町8番地
　　　　電 話　03-3262-9166～9
　　　　株式会社 裳 華 房
印刷所　横山印刷株式会社
製本所　牧製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN4-7853-1531-8

2002年6月現在

■数　学　選　書■

1 線型代数学　佐武一郎著　本体3000円

2 ベクトル解析　岩堀長慶著　本体4700円

3 解析関数(新版)　田村二郎著　本体4300円

4 ルベーグ積分入門　伊藤清三著　本体4000円

5 多様体入門　松島与三著　本体4200円

6 可換体論(新版)　永田雅宜著　本体4500円

9 代数概論　森田康夫著　本体4300円

10 代数幾何学　宮西正宜著　本体4700円

11 リーマン幾何学　酒井　隆著　本体6000円

12 複素解析概論　野口潤次郎著　本体4400円

13 偏微分方程式論入門　井川　満著　本体4300円

■数学シリーズ■

集合と位相　内田伏一著　本体2600円

代数入門 —群と加群—　堀田良之著　本体2900円

多変数の微分積分　大森英樹著　本体3000円

位相幾何学　加藤十吉著　本体3600円

関数解析　増田久弥著　本体2800円

数理統計学　稲垣宣生著　本体3400円

微分積分学　難波　誠著　本体2600円

測度と積分　折原明夫著　本体3200円

確率論　福島正俊著　本体2800円

微分積分読本 —1変数—　小林昭七著　本体2200円

続微分積分読本 —多変数—　小林昭七著　本体2200円

線形代数演習　内田・高木・剱持・浦川 共著 本体2400円

微分積分演習　岡安・吉野・高橋・武元 共著 本体2600円

応用解析セミナー 微分方程式　垣田髙夫著　本体1700円

応用解析セミナー 数値計算　大石進一著　本体2000円

物理数学コース 常微分方程式　渋谷・内田共著　本体1800円

物理数学コース 偏微分方程式　渋谷・内田共著　本体1800円

物理数学コース フーリエ解析　井町・内田共著　本体1800円

曲線と曲面 —微分幾何的アプローチ—　梅原・山田共著　本体2700円

位相入門　内田伏一著　本体2100円

解析入門 —級数/複素関数 ベクトル解析—　浦川　肇著　本体2100円

リー代数入門　佐藤　肇著　本体2000円

位相幾何入門　小宮克弘著　本体2100円

複素解析へのアプローチ　山本・坂田共著　本体2100円

フーリエ解析へのアプローチ　長瀬・齋藤共著　本体2100円